

Universidad de Ingeniería y Tecnología

## TESIS DE PREGRADO

### Análisis estático de cascarones mediante métodos analíticos

Monge Soria, Joao

*Award date:*  
2018

[Link to publication](#)

#### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### **Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

**UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA UTEC**

**Carrera de Ingeniería Mecánica**



**ANÁLISIS ESTÁTICO DE CASCARONES MEDIANTE  
MÉTODOS ANALÍTICOS**

**Tesis para obtener el título profesional de Ingeniero Mecánico**

**Joao Monge Soria**

**Código: 201210139**

**Asesor**

José Luis Mantari Laureano

Lima-Perú

Diciembre 2017

Dedicatoria

Esta tesis la dedico a mis padres  
por su apoyo y por traerme al mundo.

Agradecimientos:

Esta tesis fue hecha en el contexto del proyecto

Concytec 'Glaucoma' bajo el contrato:

N°008-2016-FONDECYT.

Aprovecho para agradecer a cada uno de

los integrantes del grupo de investigación:

Iván Ramos, Jorge Yarasca, Gianfranco Canales,

Roy Panduro, Jared Torrejón y

al PhD. José Luis Mantari porque creen en mí.

Contenido	
1.....	10
Introducción.....	10
1.1 Motivación.....	10
1.2 Problema .....	14
1.3 Objetivos.....	15
1.3.1 Objetivos principales .....	15
1.3.2 Objetivos secundarios.....	15
1.4 Alcance .....	15
1.5 Estructura de la tesis .....	18
2.....	20
Estado del arte .....	20
2.1 Principios de geometría diferencial: .....	20
2.1.1 Determinación de los parámetros de Lamé: .....	21
2.1.2 Determinación de los radios de curvatura .....	24
2.2.1 Teoría de clásica de cascarones .....	29
2.2.2 Teoría de primer orden (TPO).....	31
2.2.3 Teoría de orden superior.....	32
2.2.4 Teorías unificadas.....	34
2.2.5 Modelamiento por capa inteligente (Layerwise).....	35
2.2.6 Modelamiento por capa equivalente.....	37
2.2.7 Modelamiento en base a zigzag.....	37
3.....	39
Contexto de la investigación .....	39
3.1 Modelamiento del campo de deformaciones .....	39
3.2 Relación entre las deformación-desplazamiento .....	41
3.3 Relación esfuerzo-deformación .....	43
3.4 Principio de trabajo virtual .....	47
4.....	55
Caso de estudio.....	55
4.1 Caso 1: Reddy y Liu .....	56
4.1.1 Análisis bajo carga bisinusoidal.....	57
4.1.2. Análisis de carga distribuida .....	66
4.1.3 Analisis de carga distribuida localizada .....	72
4.1.4 Análisis mediante carga hidrostática transversal.....	77

4.1.5 Análisis con carga puntual.....	83
4.2 Caso 2: Laminación de Demasi .....	86
4.3 Retos a futuro.....	91
5 .....	92
Conclusiones.....	92
6 .....	93
Bibliografía.....	93

## Lista de Tablas

Tabla 1 Porcentaje de peso estructural para los aviones militares F-18 C/D y F-18 E/F [2] .....	11
Tabla 2 Funciones $f(z)$ presentadas por diversos investigadores para el campo presentado en [21]. .....	34
Tabla 3 Modelos híbridos refinados .....	41
Tabla 4 Coeficientes para distintos tipos de carga .....	50
Tabla 5 Propiedades mecánicas para el caso 1. ....	56
Tabla 6 Puntos de evaluación para el caso 1. ....	57
Tabla 7 Deformaciones transversales considerando $a/h=5$ . ....	58
Tabla 8 Resultados de deformaciones transversales, esfuerzo normal y esfuerzos cortantes transversales para $a/h=100$ , bajo carga bisinusoidal. ....	59
Tabla 9 Resultados de deformaciones transversales, esfuerzo normal y esfuerzos cortantes transversales para $a/h=10$ bajo carga bisinusoidal. ....	61
Tabla 10 Resultados de deformaciones transversales, esfuerzo normal y esfuerzos cortantes transversales para $a/h=10$ bajo carga uniformemente distribuido.....	68
Tabla 11 Resultados de deformaciones transversales, esfuerzo normal y esfuerzos cortantes transversales para $a/h=10$ bajo carga distribuida localizada. ....	74
Tabla 12 Resultados de deformaciones transversales, esfuerzo normal y esfuerzos cortantes transversales para $a/h=10$ bajo carga hidrostática transversal. ....	79
Tabla 13 Deformaciones transversales normalizadas para distintos ratios de curvatura-lado. ....	84
Tabla 14 Propiedades del caso de Luciano Demasi [14].....	87
Tabla 15 Puntos de evaluación para el caso 2 .....	88
Tabla 16 Resultados de esfuerzos y deformaciones para el segundo caso.....	88

## Lista de figuras

Figura 1 Interior del panteón [2]. (Samuel H. Kress collection).....	11
Figura 2 Simplificación para una cascaron tipo toroide.....	12
Figura 3 Quero: Geometría simplificada para el quero.....	13
Figura 4 Regiones del globo ocular.....	13
Figura 5 Cargas de presión en el ojo. ....	14
Figura 6 Panel de curvatura constante.....	16
Figura 7 Condiciones para un panel simplemente apoyado .....	16
Figura 8 Cascaron de material compuesto laminado [10]. ....	17
Figura 9 Coordenadas curvilíneas para un panel.....	21
Figura 10 Representación de la diferencial de una longitud de arco para un panel. ....	23
Figura 11 Vectores tangenciales y normal para el panel.....	24
Figura 12 Representación de la longitud de arco en función a R.....	26
Figura 13 Representación de la deformación según la teoría clásica de cascarones.....	30
Figura 14 Representación de la deformación según la teoría de primer orden de cascarones. ...	31
Figura 15 Representación de campo de deformación por Layerwise [34]. ....	36
Figura 16 Representación de deformación mediante teoría zigzag [34]. ....	38
Figura 17 Lámina de rotación bajo cierto ángulo $\vartheta$ [10]. ....	46
Figura 18 Condiciones para simplemente apoyado.....	51
Figura 19 Programación para modelo de capa equivalente (ESL) [37]. ....	53
Figura 20 Representación por capa equivalente (LW) [37]. ....	54
Figura 21 Representación del cascarón.....	56
Figura 22 Cascarón sometido a carga bisinusoidal. ....	58
Figura 23 Relación entre el desplazamiento transversal y el ratio $a/R$ para carga bisinusoidal..	63
Figura 24 Distribución del esfuerzo cortante transversal $\sigma_{\alpha z}$ con respecto a carga bisinusoidal. .....	64
Figura 25 Distribución del esfuerzo transversal cortante $\sigma_{\beta z}$ respecto a carga bisinusoidal ....	65
Figura 26 Distribución del esfuerzo normal transversal $\sigma_{zz}$ respecto a carga bisinusoidal .....	66
Figura 27 Cascaron sometido a carga distribuida. ....	66
Figura 28 Relación entre el desplazamiento transversal y el ratio $a/R$ para carga distribuida uniformemente. ....	69
Figura 29 Distribución del esfuerzo normal $\sigma_{\alpha\alpha}$ con respecto a carga uniformemente distribuida.....	70



Figura 30 Distribución del esfuerzo cortante en el plano $\sigma\alpha\beta$ con respecto a carga uniformemente distribuida. ....	70
Figura 31 Distribución del esfuerzo cortante transversal $\sigma\alpha z$ con respecto a carga uniformemente distribuida.....	71
Figura 32 Distribución del esfuerzo cortante transversal $\sigma\beta z$ con respecto a carga uniformemente distribuida. ....	71
Figura 33 Cascarón sometido a carga distribuida localizada. ....	72
Figura 34 Convergencia de la deformación transversal para $R/a=5$ y $a/h=10$ considerando carga distribuida localizada.....	73
Figura 35 Relación entre el desplazamiento transversal y el ratio $a/R$ para carga distribuida localizada.....	75
Figura 36 Distribución de la deformación transversal con respecto a carga distribuida localizada. ....	75
Figura 37 Distribución del esfuerzo normal $\sigma\alpha\alpha$ con respecto a carga distribuida localizada..	76
Figura 38 Distribución del esfuerzo cortante transversal $\sigma\alpha z$ con respecto a carga distribuida localizada.....	76
Figura 39 Distribución del esfuerzo transversal normal $\sigma z z$ con respecto a carga distribuida localizada.....	77
Figura 40 Cascarón sometido a carga hidrostática transversal.....	77
Figura 41 Convergencia de la deformación $w$ para $R/a=5$ y $a/h=10$ considerando carga hidrostática transversal.....	78
Figura 42 Relación entre el desplazamiento transversal y el ratio $a/R$ para carga hidrostática transversal. ....	80
Figura 43 Distribución de la deformación transversal con respecto a carga hidrostática transversal. ....	81
Figura 44 Distribución del esfuerzo normal $\sigma\alpha\alpha$ con respecto a carga hidrostática transversal. ....	81
Figura 45 Distribución del esfuerzo cortante en el plano $\sigma\alpha\beta$ con respecto a carga hidrostática transversal. ....	82
Figura 46 Distribución del esfuerzo cortante transversal $\sigma\alpha z$ con respecto a carga hidrostática transversal. ....	82
Figura 47 Distribución del esfuerzo cortante transversal $\sigma\beta z$ con respecto a carga hidrostática transversal. ....	83
Figura 48 Cascaron bajo carga puntual .....	83
Figura 49 Relación entre el desplazamiento transversal y el ratio $a/R$ para carga puntual. ....	85

Figura 50 Laminación para el problema de Demasi [14]. .....	86
Figura 51 Distribución de la deformación transversal para la laminación de Demasi. ....	89
Figura 52 Distribución de esfuerzo normal $\sigma_{\alpha\alpha}$ para la laminación de Demasi. ....	90
Figura 53 Distribución de esfuerzo cortante transversal $\sigma_{z\alpha}$ para la laminación de Demasi. ...	90
Figura 54 Distribución de esfuerzo normal $\sigma_{z\beta}$ para la laminación de Demasi.....	91

# 1

## Introducción

### 1.1 Motivación

Empezaremos esta aventura con un poco de historia. Una de las edificaciones más importantes de la cultura romana, es sin lugar a duda fue el Panteón. Considerado por pintores de la talla de Miguel Ángel como una obra “Angelical y no humana” [1]. En el área de materiales es destacable que no tuviera ningún tipo de refuerzo de acero, como en los estándares actuales, la construcción fue basada en variaciones del concreto. Una de las cosas que llama la atención es su domo, el cual posee un radio de curvatura de 21.7 metros y un espesor es de aproximadamente 1.5 metros en la parte superior. Las estructuras shells se hallan en la naturaleza y los humanos las imitamos para obtener estructuras con comportamiento mecánico en comparación con las estructuras planas. Mi tesis se enmarca en este contexto y busca evaluar estructuras curvas de tipo cascaron con materiales distintos a los metales tradicionales, específicamente los compuestos laminados.



Figura 1 Interior del panteón [2]. (Samuel H. Kress collection)

Los cascarones y los materiales compuestos son fundamentales en la ingeniería mecánica. El autor Zhobyslaw Goraj [2] presenta la relevancia en cuanto al porcentaje de peso estructural de diferentes aviones militares F-18 C/D y F-18 E/F teniendo en cuenta todos los materiales estructurales.

Tabla 1 Porcentaje de peso estructural para los aviones militares F-18 C/D y F-18 E/F [2]

Material	F-18 C/D	F-18 E/F
Aluminio	49	31
Acero	15	14
Titanio	13	21
Carbón Epoxi	10	19
Otros	13	15
Suma	100	100

Los materiales compuestos son fundamentales a fin de reducir el peso de la estructura y serán el futuro de la mayor parte de estructuras navales, automotrices, militares, etc.

Zhobyslaw Goraj [2] presenta cuatro razones principales para la crecida de los materiales compuestos: el costo de mantenimiento (resistencia a la fatiga, resistencia a la corrosión), peso estructural (reducir en \$60-100 por un 1kg de la estructura, reducción del número de juntas), costo de compra (reducción en las juntas, costo de manufactura elevado) y performance (diseño contra cagas de choque, mejorar las propiedades Aero-elásticas y térmicas).

Relatando otro ejemplo, muchos tanques de gas licuado de petróleo son construidos de forma toroidal, el estándar se encuentra basado en los requerimientos de las normas de regulación 67.01 de la comisión económica de naciones unidas europeas [3]. Las normas enfocan en cálculo de esfuerzos y deformaciones. En este tipo de proyectos se debe considerar varios tipos de materiales y espesores. La presión de explosión debe ser menor a 6750 kPa. Se debe considerar que existe un cambio de volumen en el momento de la explosión. En este contexto es necesario realizar distintos modelos matemáticos los cuales permitan predecir las deformaciones y esfuerzos. La ventaja de realizar esto permite la evaluación de un menor costo computacional en la evaluación de materiales y configuraciones geométricas como espesores y curvaturas. La imagen siguiente muestra una geometría simplificada para el problema propuesto.

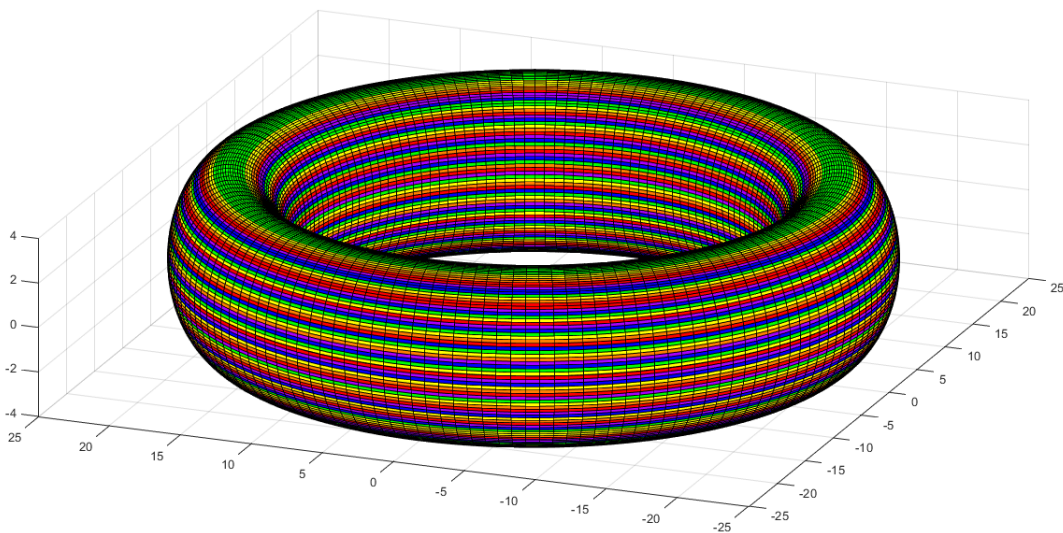


Figura 2 Simplificación para una cascaron tipo toroide.

En las fiestas del antiguo imperio incaico se usaban ciertos recipientes para beber chicha o usarlo para ciertos rituales. La denominación es el quero. Se decoraba con distintas figuras geométricas, animales y actividades referentes a la cosmovisión andina. Realmente podemos apreciar que los antiguos tenían una visión clara de los radios de

curvaturas a emplear. A continuación, se presentará un modelo simplificado para una sección de este vaso ceremonial.

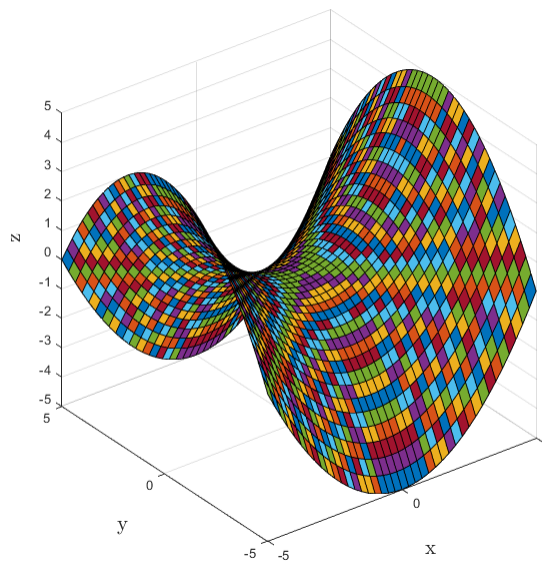


Figura 3 Quero: Geometría simplificada para el quero

El cuerpo humano también incluye muchas curvaturas, un claro ejemplo es el ojo. El estudio de Whitford y otros [4] permite caracterizar el ojo dividiéndolo en nueve regiones, como se muestra en la Figura 4.

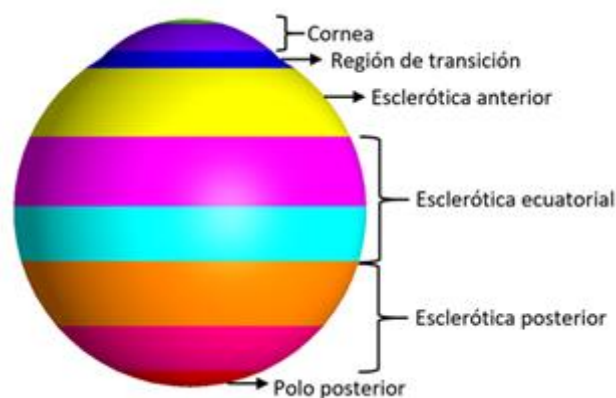


Figura 4 Regiones del globo ocular

A condiciones normales la presión interna del ojo es de 15mmHg que se ejerce en el ojo; sin embargo, cuando se presentan enfermedades como el glaucoma la presión interna es de 30mmHg [5]. En este contexto, es necesario la simulación computacional a fin de

tener resultados de deformaciones y esfuerzos que podrían servir de referencia a futuros métodos correctivos para esta enfermedad. La representación de la presión se muestra, a continuación:

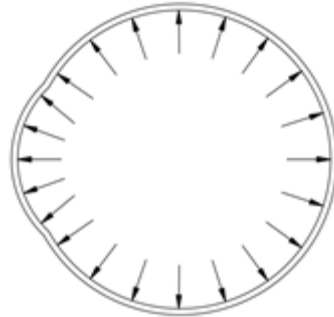


Figura 5 Cargas de presión en el ojo.

## 1.2 Problema

Como se ha visto en la sección anterior, la ingeniería se encuentra avanzando en distintos tipos de estructuras en especial las secciones curvadas. Cada vez es más frecuente el uso de materiales diferentes a los clásicos metales, a fin de reducir el peso de ciertas estructuras y el costo de mantenimiento. El hecho de probar distintos espesores, tipos de curvaturas y en algunos casos diferentes tipos de materiales; implica realizar distintos modelamientos por cada una de las configuraciones seleccionados. Se debe tener resultados certeros de las deformaciones y esfuerzos para cada uno de los casos propuestos con el fin de tomar decisiones para saber cuál es la estructura más adecuada para cierta aplicación. Si bien es cierto los softwares comerciales son muy buenos prediciendo esfuerzos y deformaciones; sin embargo, el costo computacional suele ser elevado al considerar varias configuraciones para estructura (espesor, curvatura, materiales). Con el objetivo de reducción del costo computacional, se necesitan de distintos modelos que sean capaces de reproducir resultados comparables a los softwares comerciales. Muchas veces estos modelos pueden presentar discrepancias cuando se compara la exactitud respecto a una solución exacta. Es por eso, una meta clara en la mecánica computacional es la refinación de modelos con el fin de obtener los resultados óptimos en esfuerzos y deformaciones.

### 1.3 Objetivos

#### 1.3.1 Objetivos principales

Estudiar el comportamiento estático de cascarones con curvatura constante empleando métodos analíticos.

#### 1.3.2 Objetivos secundarios

Emplear modelos refinados basados en los trabajos previos de Yarasca et. al. [6], [7]; quienes realizaron un análisis mediante algoritmo genético para poder determinar los mejores campos de deformación que permitan predecir las mejores distribuciones de esfuerzos y deformaciones.

Se extenderá los modelos refinados propuestos por Yarasca et. al. [6], [7] los cuales originalmente fueron diseñados para placas.

Estudiar distintos tipos de cargas y como afectan al cálculo de esfuerzos y deformaciones.

### 1.4 Alcance

El alcance principal radica en el tipo de cascarones a analizar. Existen geometrías complejas como son: los toroides, casquetes esféricos, conos, paraboloides, elipsoides, cilindro elíptico, catenarias, entre otros. Todos los anteriores mencionados, posee un modelamiento bastante complejo esto es; debido a que, la curvatura no puede ser considerada como un parámetro constante y depende de ciertas variables en torno a los ejes coordenados. Resolver estos problemas involucra una matemática superior a la que se presenta en esta tesis; debido a la complejidad de resolver las ecuaciones diferenciales parciales resultantes. En esta tesis, solo nos centraremos en paneles de doble curvatura constante; vale decir, paneles esféricos. A continuación, se mostrará el tipo de panel a analizar:



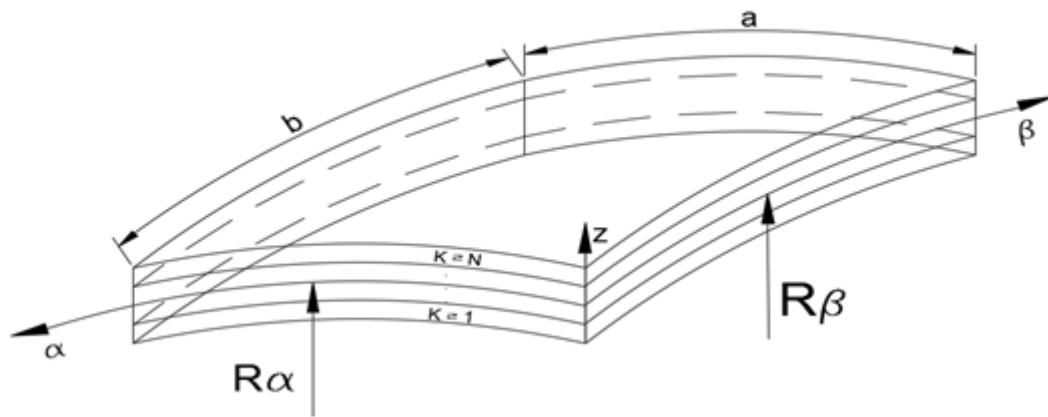


Figura 6 Panel de curvatura constante

Las condiciones de contorno es un punto importante para cualquier análisis mecánico, se debe tomar en cuenta si los cascarones se encuentran empotrados, simplemente apoyados o libres o combinaciones entre estas condiciones. En esta investigación consideramos todos los lados del panel como simplemente apoyados, lo cual implica lo siguiente:

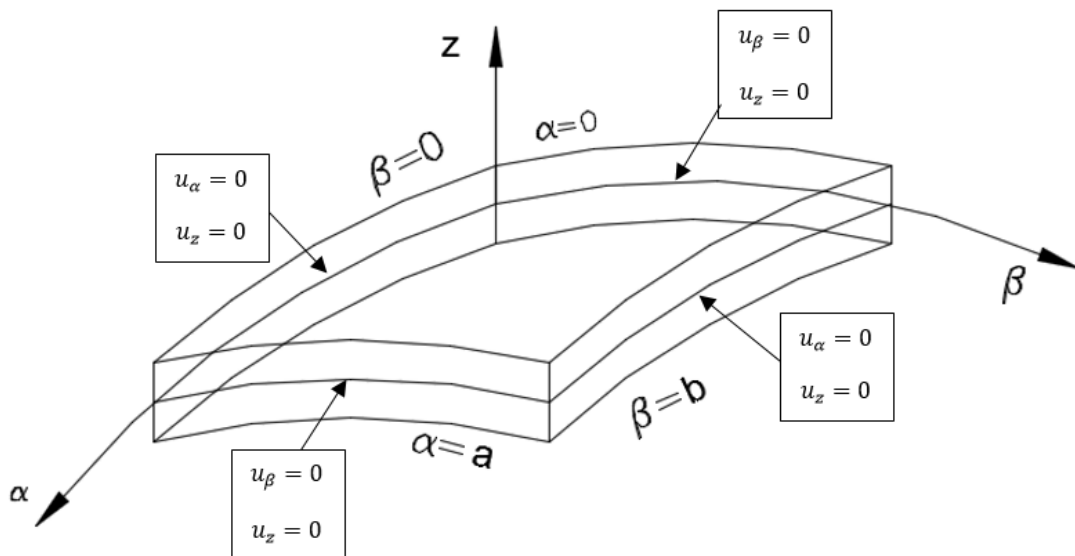


Figura 7 Condiciones para un panel simplemente apoyado

El material es un punto muy importante para analizar. Los materiales compuestos pueden ser considerados como: fibrosos [8], consisten en fibras respecto a una matriz, los particulados [9] se conforma de partículas de uno o más materiales suspendidos en una matriz y los laminados [9] que poseen capas de al menos dos materiales unidos. En este

trabajo, solo nos enfocaremos en el uso de compuestos laminados. A continuación, se presentará un cascarón de materiales compuestos laminados.

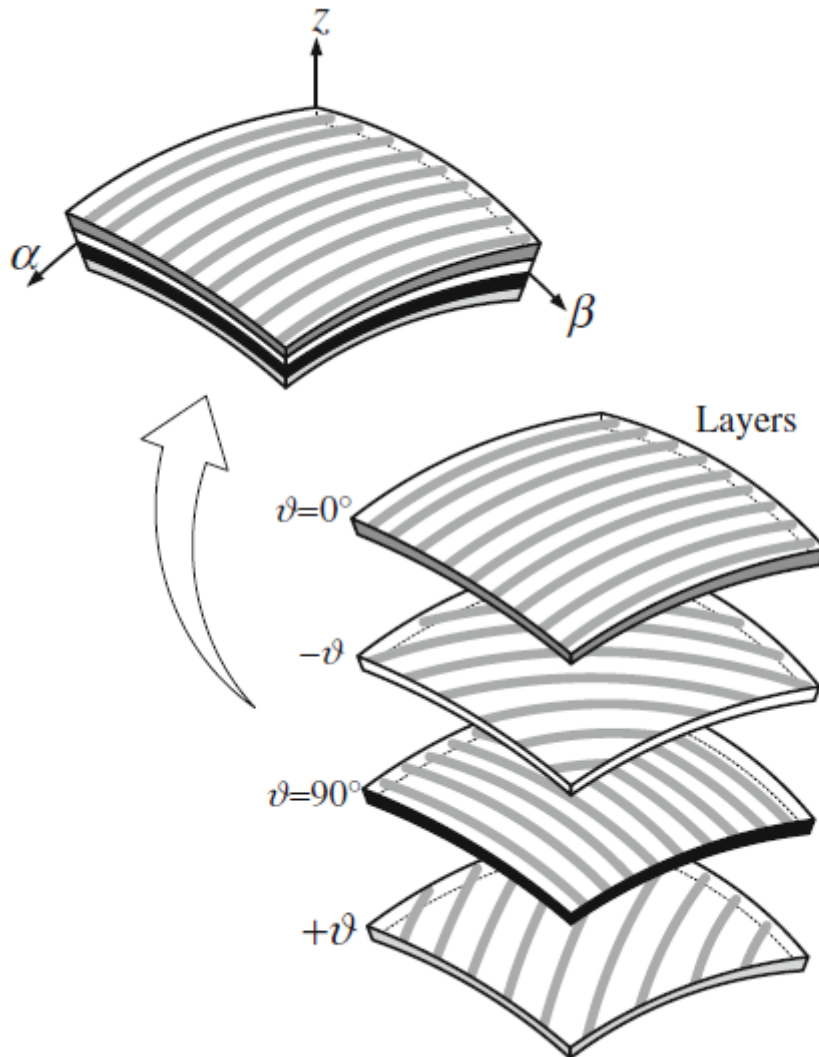


Figura 8 Cascaron de material compuesto laminado [10].

Los materiales compuestos pueden ser considerados como anisótropos, monoclónicos o ortotrópicos. Cabe resaltar, cada uno se encuentra contenido en el anterior, por ejemplo, un material es considerado anisótropo cuando no existen simetrías respecto a sus planos; sin embargo, un monoclónico posee un solo plano de simetría. Un ortotrópicos se cumple cuando los planos en si son ortogonales. Por lo que, se puede concluir que anisótropo es el caso general y los monoclónicos y ortotrópicos son casos particulares. Esto se verá en profundidad en la sección 2.3.3.

Desde el punto de vista de los compuestos laminados los materiales monoclinicos se cumplen cuando la laminación contiene por lo menos un ángulo diferente a 0 o 90; ejemplificando  $0^\circ/45^\circ/90^\circ$  sería un material monoclinico. Los materiales ortotrópicos solo pueden contener ángulos iguales a  $0^\circ$  y  $90^\circ$ . En esta tesis, nos limitaremos al análisis de materiales ortotrópicos. Para poder resolver problemas de material monoclinicos y anisotropías de forma analítica se necesitan de métodos matemáticos con una mayor dificultad como la cuadratura diferencial o meshless. Dichos métodos serán evaluados en futuras publicaciones del grupo de investigación.

## 1.5 Estructura de la tesis

El modelamiento de cascarones requiere de un análisis más detallado con respecto al de placas (para un análisis completo de placas, se recomienda revisar Monge y Mantari [11]). El principal problema se encuentra en la geometría, la cual requiere de algunas técnicas matemáticas basadas en geometría diferencial para poder trabajar con la curvatura de forma sencilla.

El segundo capítulo se refiere al estado del arte, que consta la explicación detallada de la geometría diferencial y el campo de desplazamiento. En cuanto, a la geometría diferencial se toma en consideración cuatro parámetros: los parámetros de Lamé, radios de curvatura, coeficientes métricos y el volumen diferencial del cascarón. Se darán distintos enfoques en cuanto a los campos de desplazamiento.

El tercer capítulo se centra en el contexto de la investigación. Los campos escogidos son híbridos y serán enfocados en el contexto de la teoría unificada de Carrera (CUF) [12]. Se muestra completamente los cálculos para poder obtener el núcleo fundamental, el cual es vital importancia para el posterior cálculo de esfuerzos y deformaciones.

El cuarto capítulo describe los casos que serán evaluados. El primer caso expuesto fue propuesto por Reddy y Liu [13]. Se evaluarán distintos tipos de carga: bisinusoidal, distribuida, distribuida localizada, hidrostática transversal y puntual y distintas configuraciones de curvatura y espesores. El segundo caso es propuesto por Luciano Demasi [14]. Este problema fue originalmente propuesto para placas, se propone extenderlo a cascarón empleando radios constantes.

El quinto capítulo son las conclusiones generales y específicas en torno a los campos de desplazamientos escogidos y en como la curvatura afecta al cálculo de esfuerzos y deformaciones.

# 2

## Estado del arte

Un cascarón es una estructura con una forma curva determinada y con grandes capacidades de carga en comparación a las placas. Los materiales compuestos poseen propiedades atractivas; debido a su resistencia, alta relación rigidez/peso, notable resistencia a la fatiga en comparación con los clásicos metales. Adicionalmente, los compuestos laminados permiten flexibilidad en cuanto al diseño, permitiendo escoger distintas laminaciones para una aplicación específica. Como resultado, las estructura compuestas tipo cascarón son usadas en muchas industrias como la automotriz, aeroespacial, civil y marítima.

La industria requiere de cálculos precisos de deformaciones y esfuerzos con tal de tomar de tomar decisiones del tipo de material y las dimensiones de la estructura a analizar. Es por eso que muchos investigadores se encuentran enfocados en establecer teorías las cuales puedan predecir correctamente esfuerzos y deformaciones.

En esta sección se expondrá principios básicos de geometría diferencial, los cuales servirán para determinar cuáles son los parámetros geométricos importantes para poder determinar los esfuerzos y deformaciones. Adicionalmente se realizará una descripción de los distintos campos de desplazamientos existentes en la literatura.

### 2.1 Principios de geometría diferencial:

La geometría diferencial es una herramienta matemática que permite describir el entorno matemático de las curvaturas de una forma sencilla. Para poder desarrollar el análisis de cascarones se deben establecer tres parámetros básicos: Coeficientes de Lamé, radios de

curvatura y coeficientes métricos. La exposición de estos tres conceptos, se presentarán en esta sección.

Si se requiere ver con un mayor detenimiento la matemática y detalles particulares en geometría diferencial se recomienda ver el libro clásico del autor Leissa [15] y la tesis de doctorado del profesor Francesco Tornabene [16].

### 2.1.1 Determinación de los parámetros de Lamé:

El principal problema en cascarones radica en realizar un cambio de coordenadas. Las coordenadas que conocemos  $(x, y, z)$  sirven para la resolución de problemas en los cuales se establecen secciones rectas únicamente. Dicho fenómeno puede ser comprendido de la siguiente manera:

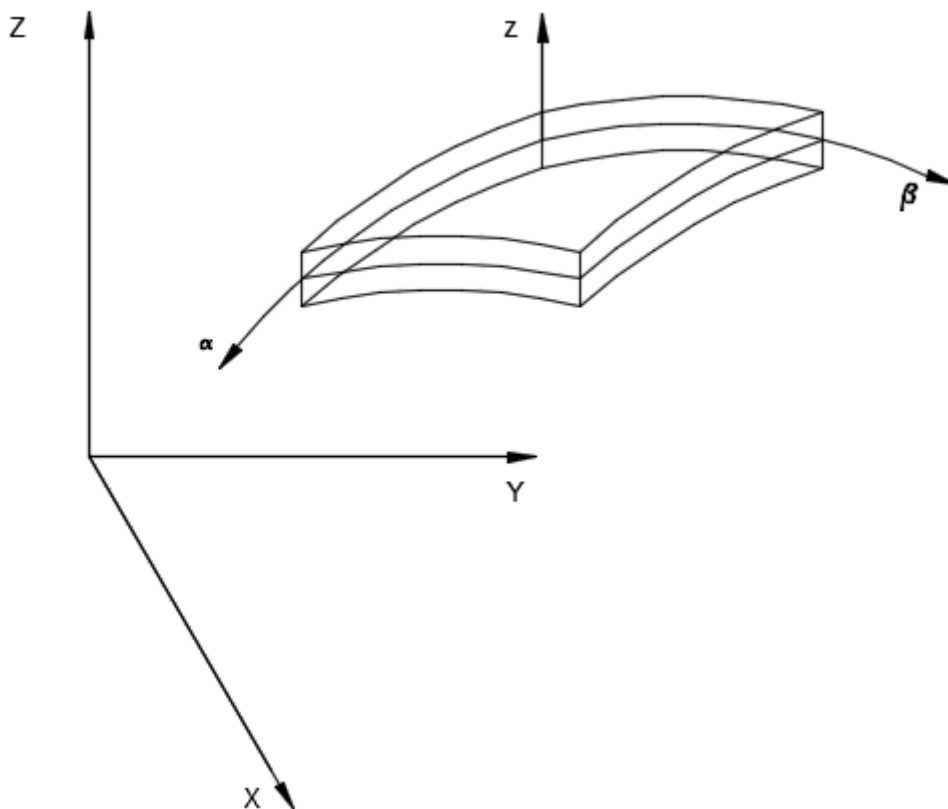


Figura 9 Coordenadas curvilíneas para un panel

Como se puede ver en la imagen, el hecho de establecer secciones curvilíneas dificulta el uso de las clásicas coordenadas  $(x, y, z)$  por ello se establecen las coordenadas curvilíneas

$(\alpha, \beta, z)$  las cuales siguen directamente la línea de acción de la curvatura, pudiendo establecer de forma numérica los distintos límites de integración sobre las secciones. Para poder establecer la geometría del cascarón primero se debe realizar ecuaciones paramétricas en torno a los distintos ejes coordenados específicamente en el plano medio. Las ecuaciones paramétricas para el cambio de variables del plano medio se presentan, a continuación:

$$x = r_{1(\alpha, \beta)}$$

$$y = r_{2(\alpha, \beta)}$$

$$z = r_{3(\alpha, \beta)} \quad (2.1a-c)$$

Escrito de forma vectorial las coordenadas rectangulares se expresan por  $r$ , tomando en cuenta los vectores unitarios  $e_1, e_2, e_3$  se determina:

$$r = r_{1(\alpha, \beta)}e_1 + r_{2(\alpha, \beta)}e_2 + r_{3(\alpha, \beta)}e_3 \quad (2.2)$$

Si se calcula la derivada del vector  $r$  y analizando por regla de la cadena se tiene lo siguiente:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial r}{\partial \beta} d\beta \quad (2.3)$$

La ecuación (2.3) se expresa en una notación común en la mayoría de las bibliografías del tema como:

$$dr = r_{,\alpha} d\alpha + r_{,\beta} d\beta \quad (2.4)$$

Se debe tomar en cuenta que  $r_{,\alpha}$  simboliza la derivada del vector  $r$  en función al eje coordenada  $\alpha$  y  $r_{,\beta}$  la de  $\beta$ .

La representación gráfica en torno a dichas diferenciales es la siguiente:

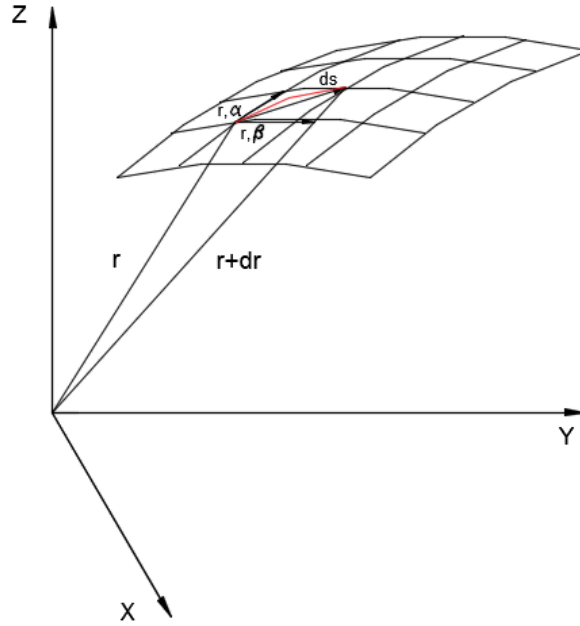


Figura 10 Representación de la diferencial de una longitud de arco para un panel.

Si se quiere encontrar la longitud de arco respecto a la variación diferencial en cierta sección del plano medio de la curvatura se debe realizar un producto punto.

$$ds^2 = dr \cdot dr \quad (2.5)$$

Reemplazando las ecuaciones presentas en (2.4) en (2.5) se obtiene lo siguiente:

$$ds^2 = r_{,\alpha} \cdot r_{,\alpha} (d\alpha)^2 + 2r_{,\alpha} \cdot r_{,\beta} (d\alpha d\beta) + r_{,\beta} \cdot r_{,\beta} (d\beta)^2 \quad (2.6)$$

De la siguiente expresión se rescatan dos términos importantes:

$$A_\alpha = \sqrt{r_{,\alpha} \cdot r_{,\alpha}}$$

$$A_\beta = \sqrt{r_{,\beta} \cdot r_{,\beta}} \quad (2.7a-b)$$

Donde  $A_\alpha$  y  $A_\beta$  son los considerados coeficientes de Lamé los cuales simbolizan la longitud vectorial de cada uno de esos vectores en torno a los ejes  $\alpha$  y  $\beta$  [15]. Estos parámetros son básicos para entender el trasfondo del tipo de curvaturas. Tal como se mencionó, estos parámetros pueden ser en función de variables o bien valores numéricos, en lo propuesto por esta tesis, nos limitaremos a que sean constantes.



### 2.1.2 Determinación de los radios de curvatura

Los radios de curvatura son fundamentales en el estudio de los cascarones. En esta parte, nos centraremos en cómo obtener los radios. En primer lugar, debemos entender los vectores unitarios para los ejes  $\alpha$  y  $\beta$  los cuales denominaremos como:  $t_\alpha$  y  $t_\beta$ , respectivamente. El vector normal a  $t_\alpha$  y  $t_\beta$  es representado como  $t_n$ . En la siguiente Figura se muestran estos vectores.

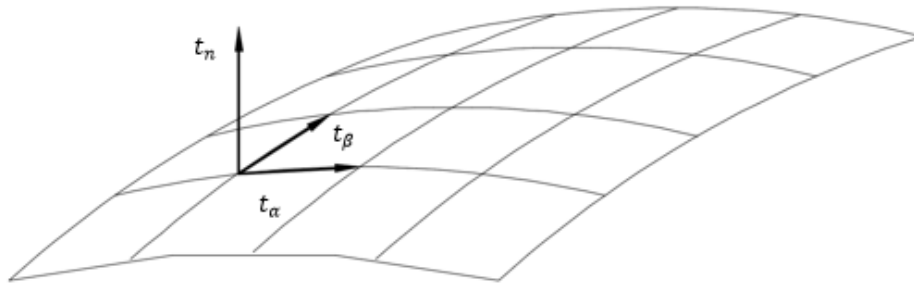


Figura 11 Vectores tangenciales y normal para el panel.

Las relaciones para los vectores normales se encuentran directamente vinculados con la teoría de la sección anterior. Las expresiones matemáticas para los vectores son las siguientes:

$$t_\alpha = \frac{r_{,\alpha}}{|r_{,\alpha}|} = \frac{r_{,\alpha}}{A_\alpha}$$

$$t_\beta = \frac{r_{,\beta}}{|r_{,\beta}|} = \frac{r_{,\beta}}{A_\beta} \quad (2.8a-b)$$

El vector normal  $t_n$  es calculado como un producto vectorial entre los vectores unitarios de las coordenadas curvilíneas  $\alpha$  y  $\beta$ . Matemáticamente se expresa:

$$t_n = \frac{r_{,\alpha} \times r_{,\beta}}{A_\alpha A_\beta} \quad (2.9)$$

Teniendo la Ecuación 2.4, se diferencia la primera derivada en función a la diferencial de arco ( $s$ ):

$$\frac{dr}{ds} = r_{,\alpha} \frac{d\alpha}{ds} + r_{,\beta} \frac{d\beta}{ds} \quad (2.10)$$

El cálculo de los radios de curvatura se encuentra directamente calculados con la segunda derivada de la parametrización. Se establecerá dicha derivada:

$$\frac{d^2r}{ds^2} = r_{,\alpha\alpha} \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + r_{,\beta\beta} \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + 2r_{,\alpha\beta} \left(\frac{d\alpha}{ds}\right) \left(\frac{d\beta}{ds}\right) + r_{,\alpha} \frac{d^2\alpha}{ds^2} + r_{,\beta} \frac{d^2\beta}{ds^2} \quad (2.11)$$

Si multiplicamos la ecuación (2.11) por el vector normal unitario  $t_n$ , se tiene lo siguiente:

$$t_n \cdot \frac{d^2r}{ds^2} = t_n \cdot r_{,\alpha\alpha} \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + t_n \cdot r_{,\beta\beta} \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 \quad (2.12)$$

Se debe tomar en cuenta que debido a la perpendicularidad entre los vectores  $t_\alpha$ ,  $t_\beta$  y  $t_n$  entre sí, se cumple:  $r_{,\alpha} \cdot t_n = 0$ ,  $r_{,\beta} \cdot t_n = 0$  y  $t_n \cdot r_{,\alpha\beta} = 0$ . Como se mencionó, la segunda derivada se encuentra directamente relacionada con los radios de curvatura y se relacionan mediante la fórmula de Frenet-Serret [17]:

$$\frac{d^2r}{ds^2} = -\frac{t_n}{R} \quad (2.13)$$

De las ecuaciones (2.11) y (2.12) se puede demostrar lo siguiente:

$$\frac{-1}{R} = \frac{t_n \cdot r_{,\alpha\alpha} (d\alpha)^2 + t_n \cdot r_{,\beta\beta} (d\beta)^2}{(ds)^2} \quad (2.14)$$

La ecuación (2.6) no consideró la perpendicularidad entre los vectores  $t_\alpha$  y  $t_\beta$ ; por lo que dicha ecuación se reduce a:

$$ds = r_{,\alpha} \cdot r_{,\alpha} (d\alpha)^2 + r_{,\beta} \cdot r_{,\beta} (d\beta)^2 \quad (2.15)$$

Reemplazando la ecuación (2.15) en (2.14):

$$\frac{-1}{R} = \frac{t_n \cdot r_{,\alpha\alpha} (d\alpha)^2 + t_n \cdot r_{,\beta\beta} (d\beta)^2}{r_{,\alpha} \cdot r_{,\alpha} (d\alpha)^2 + r_{,\beta} \cdot r_{,\beta} (d\beta)^2} \quad (2.16)$$

Los radios de curvaturas se calculan considerando  $d\beta = 0$  y  $d\alpha = 0$  para  $R_\alpha$  y  $R_\beta$ .

Tomando en cuenta las ecuaciones (2.7a-b), se demuestra lo siguiente:

$$R_\alpha = \frac{-r_{,\alpha} \cdot r_{,\alpha}}{t_n \cdot r_{,\alpha\alpha}}$$

$$R_\beta = \frac{-r_{,\beta} \cdot r_{,\beta}}{t_n \cdot r_{,\beta\beta}} \quad (2.17a-b)$$

Los radios de curvatura  $R_\alpha$  y  $R_\beta$  se encuentran relacionados con la forma de la estructura. En esta tesis, se consideran los radios como valores numéricos constantes.

### 2.1.3 Determinación de los coeficientes métricos

Hasta el momento, solo se ha tomado la parametrización en torno al plano medio del cascaron; sin embargo, debemos recordar, ese dominio solo corresponde a un área. Por lo que, se debe establecer un nuevo vector el cual se encuentre vinculado con el espesor. En este contexto, se define el vector de parametrización  $R$  que depende de  $r$  presentado en la Ecuación (2.2), del plano coordenado en  $z$  (ver Figura 12) y el vector normal  $t_n$  (ver Ecuación 2.9). La relación es la siguiente:

$$R = r + t_n \cdot z \quad (2.18)$$

De la misma forma, que en la sección 2.1.1 se calculó la longitud de arco del nuevo vector. Para esto, es necesario diferenciar el vector  $R$ .

$$dR = dr + t_n \cdot dz + dt_n \cdot z \quad (2.19)$$

La longitud de arco se encuentra representada en la Figura 12:

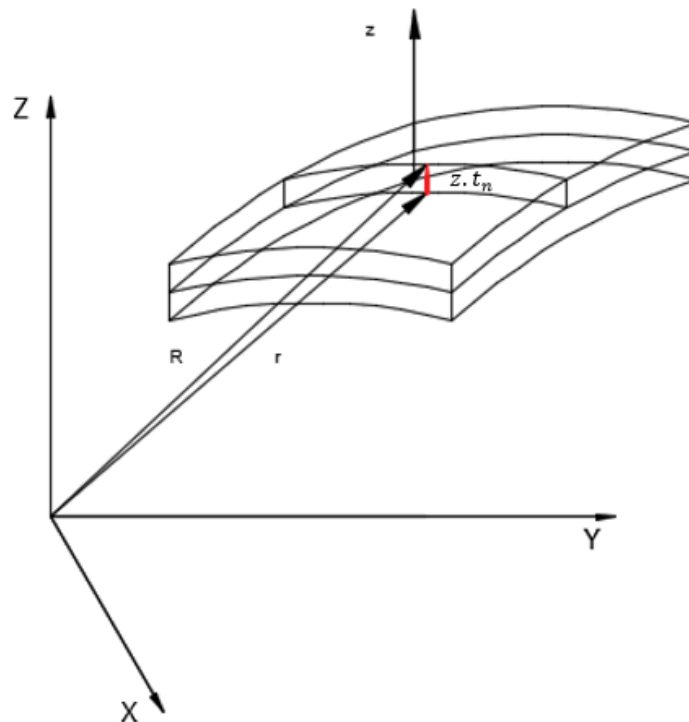


Figura 12 Representación de la longitud de arco en función a  $R$ .

La longitud de arco se representa como:

$$dS^2 = (dr + n \cdot dz + dn \cdot z)(dr + n \cdot dz + dn \cdot z) \quad (2.20)$$

La derivada del vector normal  $t_n$  se encuentra determinada por:

$$dt_n = \frac{\partial t_n}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial t_n}{\partial \beta} d\beta \quad (2.21)$$

La derivada de la parametrización  $r$  fue definida en (2.4).

Debido a la perpendicularidad de vectores se establece lo siguiente [18]:

$$d\alpha \cdot d\beta = 0$$

$$d\alpha \cdot dz = 0$$

$$d\beta \cdot dz = 0$$

$$dn \cdot dn = 1 \quad (2.22a-d)$$

Si se desarrolla el producto de (2.19) y posteriormente se reemplaza (2.20) y (2.4) y (2.8a-d), se tiene lo siguiente:

$$dS^2 = r_{,\alpha} \cdot r_{,\alpha} (d\alpha)^2 + r_{,\beta} \cdot r_{,\beta} (d\beta)^2 + 2z \left( r_{,\alpha} \cdot \frac{\partial t_n}{\partial \alpha} \cdot (d\alpha)^2 + r_{,\beta} \cdot \frac{\partial t_n}{\partial \beta} \cdot (d\beta)^2 \right) + (dz)^2 + z^2 \left( \frac{\partial t_n}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial t_n}{\partial \alpha} \cdot (d\alpha)^2 + \frac{\partial t_n}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial t_n}{\partial \beta} \cdot (d\beta)^2 \right) \quad (2.23)$$

Se establecen las siguientes ecuaciones, estas no serán demostradas; sin embargo, la explicación detallada puede ser encontrada en la referencia [18].

$$\frac{\partial t_n}{\partial \alpha} = \frac{A_\alpha}{R_\alpha}$$

$$\frac{\partial t_n}{\partial \beta} = \frac{A_\beta}{R_\beta} \quad (2.24)$$

Tomando en cuenta (2.24) y (2.7a-b), se establece lo siguiente:

$$dS^2 = \left( (A_\alpha) \left( 1 + \frac{z}{R_\alpha} \right) \right)^2 (d\alpha)^2 + \left( (A_\beta) \left( 1 + \frac{z}{R_\beta} \right) \right)^2 (d\beta)^2 + (dz)^2 \quad (2.25)$$

Se establecen los coeficientes métricos como:

$$H_\alpha = 1 + \frac{z}{R_\alpha}$$

$$H_\beta = 1 + \frac{z}{R_\beta} \quad (2.26a-b)$$

En los paneles establecidos para esta tesis, se establece que los coeficientes métricos no varían en torno a  $\alpha$  y  $\beta$ , solo en función al espesor. Esto se debe a que  $R_\alpha$  y  $R_\beta$  son siempre valores numéricos.

En base a esta información los coeficientes métricos establecidos para un panel tipo placa se tienen:  $R_\alpha = R_\beta = \infty$ , luego  $H_\alpha = H_\beta = 1$ .

Se establece tres parámetros diferenciales diferentes: la longitud de arco, el área del plano medio y el volumen del cascaron completo. En primer lugar, se debe tomar en cuenta la longitud de arco (1D) y para esto se debe recordar la ecuación (2.6):

$$ds^2 = r_{,\alpha} \cdot r_{,\alpha} (d\alpha)^2 + 2r_{,\alpha} \cdot r_{,\beta} (d\alpha d\beta) + r_{,\beta} \cdot r_{,\beta} (d\beta)^2 \quad (2.27)$$

Ignorando el segundo término de la ecuación; debido a, la perpendicularidad del  $t_\alpha$  y  $t_\beta$  y reemplazando (2.7a-b). Se puede demostrar lo siguiente:

$$s_\alpha = A_\alpha d\alpha$$

$$s_\beta = A_\beta d\beta \quad (2.28a-b)$$

En cuanto al área se debe recordar la ecuación (2.25):

$$dS^2 = \left( (A_\alpha) \left( 1 + \frac{z}{R_\alpha} \right) \right)^2 (d\alpha)^2 + \left( (A_\beta) \left( 1 + \frac{z}{R_\beta} \right) \right)^2 (d\alpha)^2 + (dz)^2 \quad (2.29)$$

Las diferenciales de área se establecen como:

$$dS_\alpha = (A_\alpha) \left( 1 + \frac{z}{R_\alpha} \right) d\alpha$$

$$dS_\beta = (A_\beta) \left( 1 + \frac{z}{R_\beta} \right) d\beta \quad (2.30a-b)$$

La diferencial del volumen se establece fácilmente conociendo a las diferenciales de área, se establece lo siguiente:

$$dV = dS_\alpha dS_\beta dz = (A_\alpha) \left( 1 + \frac{z}{R_\alpha} \right) (A_\beta) \left( 1 + \frac{z}{R_\beta} \right) d\alpha d\beta dz \quad (2.31)$$

Finalmente, se reemplaza las ecuaciones (2.26a-b) en (2.31):

$$dV = (A_\alpha)(H_\alpha)(A_\beta)(H_\beta) d\alpha d\beta dz \quad (2.32)$$

Esta es la ecuación principal que nos ayudará en la totalidad de la tesis presentada, para realizar los distintos análisis energéticos basados en el principio del desplazamiento.

## 2.2 Campos de desplazamiento

El modelo computacional se encuentra basado en el uso de modelos refinados extraídos de los artículos de Yarasca et al. [6], [7]. La contribución principal de esta tesis es la extensión de dichos modelos a cascarones para esto se debe tomar en cuenta todos los parámetros en 2.1, los coeficientes de Lamé, los radios de curvatura, los coeficientes métricos y el volumen diferencial del cascarón. La matemática será considerada en referencia al principio de desplazamiento virtual y las ecuaciones gobernantes serán resueltas aplicando las ecuaciones de Navier. Se resalta que toda esta tesis fue hecha mediante el software Matlab.

### 2.2.1 Teoría de clásica de cascarones

La teoría clásica de los cascarones recoge las asunciones principales de Kirchhoff (válidas únicamente para placas) y el legado de Love [19], quien trato de hacer una extensión a secciones curvas. La bibliografía más importante en cuanto a teorías clásicas se puede encontrar en los libros siguientes investigadores: Leissa [15] y Soedel [20].

La teoría citada no considera los efectos transversales cortantes, ni los transversales normales en cuanto a su relación deformación-desplazamiento, escrito de manera matemáticamente se establece lo siguiente:

$$\varepsilon_{\alpha z} = 0$$

$$\varepsilon_{\beta z} = 0$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \tag{2.33a-c}$$

Las deformaciones permanecen perpendiculares al plano de la superficie media antes y después de la deformación. Dicho comportamiento se puede observar en la imagen.

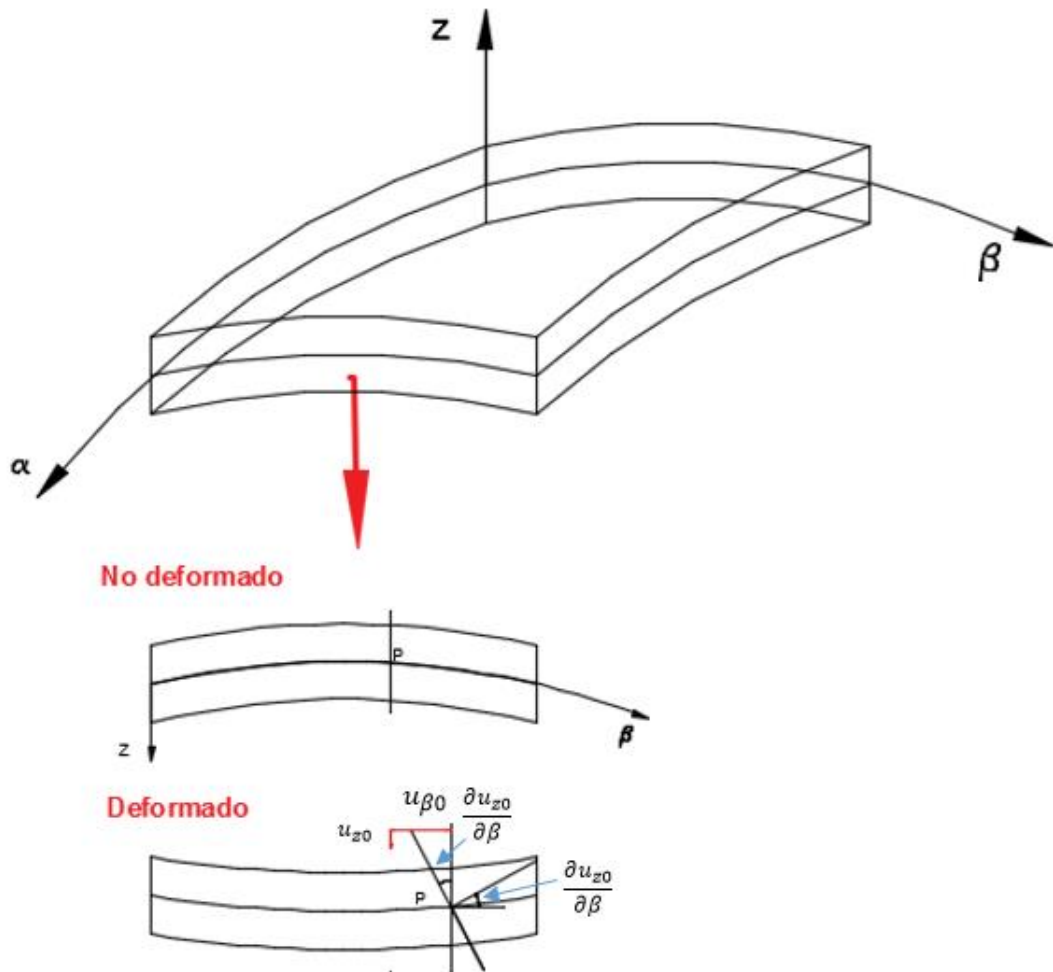


Figura 13 Representación de la deformación según la teoría clásica de cascarones.

Dada la imagen y tomando en cuenta la misma realidad para el otro eje coordenado, se puede demostrar mediante una aproximación geométrica, los campos de desplazamientos siguientes:

$$u_{\alpha} = u_{\alpha 0}(\alpha, \beta) - z \frac{\partial u_{z0}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}$$

$$u_{\beta} = v_{\beta 0}(\alpha, \beta) - z \frac{\partial u_{z0}(\alpha, \beta)}{\partial \beta}$$

$$u_z = u_{z0}(\alpha, \beta) \tag{2.34a-c}$$

La ecuación demuestra que la teoría de primer orden depende solo de tres incógnitas ( $u_{\alpha 0}, v_{\beta 0}, w_{oz}$ ).

### 2.2.2 Teoría de primer orden (TPO)

El Instituto Tecnológico de Massachussets (MIT) a cargo de sus investigadores Hildebrand, Reissner y Thomas [21] propusieron una teoría la cual podía calcular las deformaciones transversales cortantes. Esta teoría modela los campos de desplazamiento linealmente a través de su espesor. La siguiente imagen resume de manera intuitiva la deformación bajo una TPO:

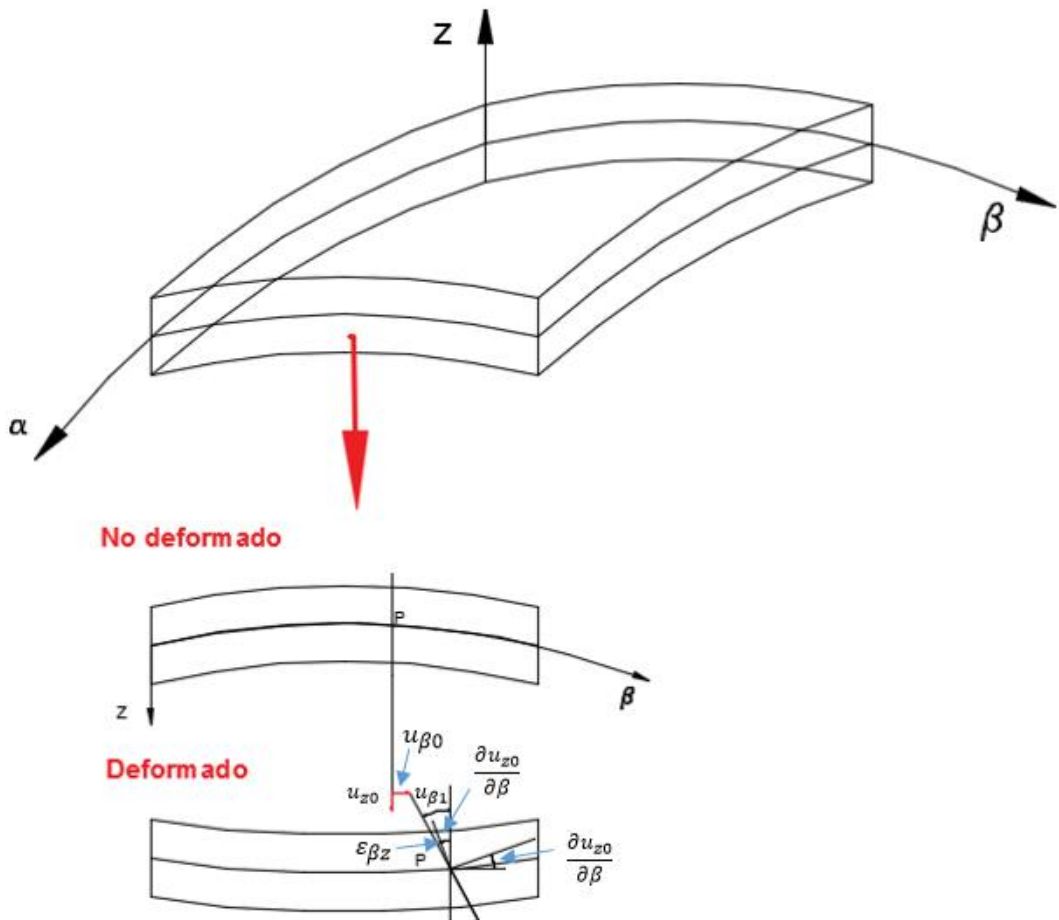


Figura 14 Representación de la deformación según la teoría de primer orden de cascarones.

De la misma forma, la teoría clásica, la siguiente imagen permite demostrar las siguientes relaciones de desplazamientos:

$$u_\alpha = u_{\alpha 0}(\alpha, \beta) + z u_{\alpha 1}(\alpha, \beta)$$

$$u_\beta = u_{\beta 0}(\alpha, \beta) + z u_{\beta 1}(\alpha, \beta)$$

$$u_z = u_{z 0}(\alpha, \beta) \tag{2.35a-c}$$



La importancia comercial de esta teoría radica en que inspiró a muchos softwares de simulación computacional, en especial ANSYS; debido a, la baja cantidad de incógnitas ( $u_{\alpha 0}, u_{\alpha 1}, u_{\beta 0}, u_{\alpha 1}, u_{z 0}$ ) las cuales se necesitan solucionar. La desventaja principal es no poder modelar el esfuerzo normal transversal.

### 2.2.3 Teoría de orden superior

Las teorías de orden superior son teorías que incluyen términos adicionales en los campos de desplazamiento y de esta forma poder predecir de mejor forma el comportamiento de los materiales frente a una carga externa. Dichas teorías pueden tener extensiones en cuanto a términos no polinómicos y polinómicos. A continuación, daré algunos ejemplos de teorías de primer orden:

Ejemplo 1: Campos de deformación con extensión polinómica.

La siguiente es una teoría de tercer orden propuesta por el investigador Kant et al. [22] en base a polinomios de Maclaurin, con 12 incógnitas (se resalta que estas teorías son específicamente para placas; sin embargo, se presentaran extendidas para cascarones):

$$\begin{aligned}
 u_{\alpha} &= u_{\alpha 0} + zu_{\alpha 1} + z^2u_{\alpha 2} + z^3u_{\alpha 3} \\
 u_{\beta} &= u_{\beta 0} + zu_{\beta 1} + z^2u_{\beta 2} + z^3u_{\beta 3} \\
 u_z &= u_{z 0} + zu_{z 1} + z^2u_{z 2} + z^3u_{z 3}
 \end{aligned}
 \tag{2.36a-c}$$

Muchos investigadores han empleado modelos similares, pero con un menor de incógnitas.

Modelo de Pandya y Kant [23] [9 incógnitas]:

$$\begin{aligned}
 u_{\alpha} &= u_{\alpha 0} + zu_{\alpha 1} + z^2u_{\alpha 2} + z^3u_{\alpha 3} \\
 u_{\beta} &= u_{\beta 0} + zu_{\beta 1} + z^2u_{\beta 2} + z^3u_{\beta 3} \\
 u_z &= u_{z 0}
 \end{aligned}
 \tag{2.37a-c}$$

Modelo de Roque [24] [7 incógnitas]:

$$u_{\alpha} = u_{\alpha 0} + zu_{\alpha 1} + z^3u_{\alpha 3}$$

$$u_\beta = u_{\beta 0} + zu_{\beta 1} + z^3u_{\beta 3}$$

$$u_z = u_{z0} \quad (2.38a-c)$$

Modelo de Lo [25] [11 variables]

$$u_\alpha = u_{\alpha 0} + zu_{\alpha 1} + z^2u_{\alpha 2} + z^3u_{\alpha 3}$$

$$u_\beta = u_{\beta 0} + zu_{\beta 1} + z^2u_{\beta 2} + z^3u_{\beta 3}$$

$$u_z = u_{z0} + zu_{z1} + z^2u_{z2} \quad (2.39a-c)$$

Todas las teorías del primer ejemplo son tercer orden; debido al máximo exponente de la expansión con respecto al espesor. Su diferencia radica en la cantidad de incógnitas a analizar. Otra observación importante, es que solo en los modelos presentados por Lo [25] y Roque [24] se analiza la deformación transversal normal.

Ejemplo 2: Campos de deformación con extensión no-polinómicas:

La siguiente es una teoría de cinco incógnitas presentada por mi asesor [26]:

$$u_\alpha = \left(1 + \frac{\zeta}{R_\alpha}\right) u_{\alpha 0} - \frac{z}{A_\alpha} \frac{\partial u_{z0}}{\partial \alpha} + f(z)\phi_1$$

$$u_\beta = \left(1 + \frac{\zeta}{R_\beta}\right) u_{\beta 0} - \frac{z}{A_\beta} \frac{\partial u_{z0}}{\partial \beta} + f(z)\phi_2$$

$$u_z = u_{z0} \quad (2.40a-c)$$

El campo presenta las siguientes incógnitas:  $u_0, \phi_1, v_0, \phi_2, w_0$ . La función  $f(z)$  representa una función a lo largo del espesor del cascaron. Existen determinadas teorías que poseen una forma parecida a lo presentado en (2.2.3.5); originalmente la mayor parte de dichas teorías fueron formuladas para placas; sin embargo, pueden ser fácilmente expandidas a cascarones.

A continuación, resumiré algunas expansiones de  $f(z)$  propuestas en la literatura:

Tabla 2 Funciones  $f(z)$  presentadas por diversos investigadores para el campo presentado en [21].

Investigador	Función
Ambartsumian [27]	$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$
Reissner [28]	$f(z) = \frac{5z}{4} \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
Reddy [29]	$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
Toratier [30]	$f(z) = \frac{h}{\pi} \left( \sin \left( \frac{\pi z}{h} \right) \right)$
Soldatos [31]	$f(z) = h \left( \sin \left( \frac{z}{h} \right) \right) - z \cosh \left( \frac{1}{2} \right)$

La idea de este ejemplo es darnos cuenta de que la función  $f(z)$  puede ser representada de múltiples formas, ya sean de forma polinómica o no polinómica con tal de poder solucionar un problema en específico. Se tomará en cuenta de que los campos de deformación no toman en cuenta la deformación transversal normal.

#### 2.2.4 Teorías unificadas

Las teorías unificadas en si son una extensión de las teorías de orden superior. La importancia radica en la posibilidad de poder estudiar diversos campos de deformación en un solo código (dichos motivos serán expuestos más adelante).

Empezaremos con un ejemplo, si quisiéramos expandir el modelo de Kant tomando en cuenta un orden superior (N) y para cualquier tipo de función ( $F_{sN}(z)$ ) ya sea polinómica o no polinómica a lo largo del espesor se tendría:

$$u_{\alpha} = F_{s0}u_{\alpha0} + F_{s1}u_{\alpha1} + F_{s2}u_{\alpha2} + \dots + F_{sN}u_{\alpha N}$$

$$u_{\beta} = F_{s0}u_{\beta0} + F_{s1}u_{\beta1} + F_{s2}u_{\beta2} + \dots + F_{sN}u_{\beta N}$$

$$u_z = F_{s0}u_{z0} + F_{s1}u_{z1} + F_{s2}u_{z2} + \dots + F_{sN}u_{zN} \quad (2.41a-c)$$

Si tomamos en cuenta una forma matricial de las ecuaciones propuestas en (2.2.4.1), se tendrá:

$$[u_\alpha \quad u_\beta \quad u_z] = [F_{s0} \quad F_{s1} \quad F_{s2} \quad \dots \quad F_{sN}] \begin{bmatrix} u_{\alpha 0} & u_{\beta 0} & u_{z0} \\ u_{\alpha 1} & u_{\beta 1} & u_{z1} \\ u_{\alpha 2} & u_{\beta 2} & u_{z2} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{\alpha N} & u_{\beta N} & u_{zN} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Si se considera el vector  $[u \quad v \quad w] = u_s$ , se puede demostrar lo siguiente:

$$[u_s] = [F_{s0} \quad F_{s1} \quad F_{s2} \quad \dots \quad F_{sN}] \begin{bmatrix} u_{s0} \\ u_{s1} \\ u_{s2} \\ \dots \\ u_{sN} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Escrito de forma de sumatoria se tiene lo siguiente:

$$u_s = F_{s0}u_{s0} + F_{s1}u_{s1} + F_{s2}u_{s2} + \dots + F_{sN}u_{sN} \quad (2.44)$$

Si se escribe la ecuación en torno a la notación de Einstein, se tiene

$$u = F_s u_s, \quad s = 0, 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.45)$$

La variacional es otro parámetro que debemos considerar para tener nuestras ecuaciones analíticas. Formalmente se expresa de esta manera:

$$\delta u = F_\tau \delta u_\tau, \quad \tau = 0, 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.46)$$

Las ecuaciones presentadas en (2.2.4.5) y (2.2.4.6), se conocen como la formulación Unificada de Carrera (CUF) [12]. Existen otras teorías unificadas, una muy conocida es la Demasi [32], la cual radica en tener funciones de expansión ( $F_{sN}(z)$ ) por cada campo de deformación; sin embargo, los resultados con estas teorías serán presentados en mis futuras investigaciones.

### 2.2.5 Modelamiento por capa inteligente (Layerwise)

El modelo de capa inteligente los campos de deformación se encuentran vinculados a cada nivel de capa; es decir las incógnitas ( $u_s$ ) y las funciones de forma ( $F_s$ ) varían en torno a capa de la estructura. La función que se escogió para esta esté análisis son los polinomios de Legendre; debido a, tener un alto grado de precisión en cuanto a sus resultados. Pero se debe tener las funciones para capa inteligente también pueden expresarse en termino de funciones no polinómicos (Véase [33]). Los campos son expresados de la siguiente forma:

$$u^k = F_s u_s^k = F_t u_t^k + F_b u_b^k + F_r u_r^k \quad (2.47)$$

Las funciones  $F_s$  tienen la siguiente representación:

$$F_t = \frac{P_0 + P_1}{2}, F_b = \frac{P_0 - P_1}{2}, F_r = P_r - P_{r-2}, r = 2, 3, \dots, N \quad (2.48)$$

Estas funciones se escriben en torno a coordenadas locales, las cuales se definirán a continuación:

$$\zeta_k = \frac{2(z - z_{0k})}{h_k}, \text{ donde: } -1 \leq \zeta_k \leq 1 \quad (2.49)$$

Donde,  $h_k$  es la altura relativa de cada una de las capas y  $z_{0k}$  representa la coordenada de la parte media de cada capa. Estas dos nuevas variables se expresan de una forma gráfica en la siguiente figura:

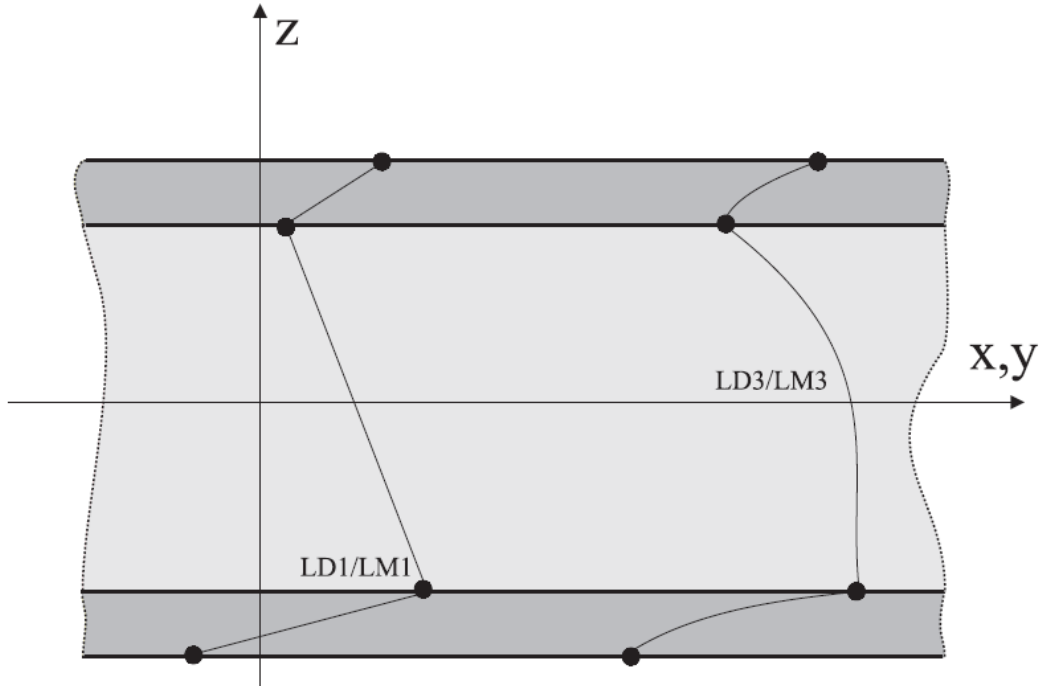


Figura 15 Representación de campo de deformación por Layerwise [34].

Los valores de las funciones  $F_s$  se expresan de la siguiente forma:

$$P_0 = 1, P_1 = \zeta_k, P_2 = \frac{3\zeta_k^2 - 1}{2}, P_3 = \frac{5\zeta_k^3}{2} - \frac{3\zeta_k}{2}, P_4 = \frac{35\zeta_k^4}{8} - \frac{15\zeta_k^2}{4} + \frac{3}{8} \quad (2.50)$$

En base a los valores máximos y mínimos del dominio de la coordenada local, es sencillo demostrar lo siguiente:

$$\begin{aligned} \zeta_k = 1: F_t = 1, F_b = 0, F_r = 0 \\ \zeta_k = -1: F_t = 0, F_b = 1, F_r = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Cuando se desarrolla el modelo layerwise se genera una interfaz entre los desplazamientos de la parte superior de una capa y la parte inferior de la capa siguiente, con lo cual se establece:

$$u_t^k = u_b^{k+1}, k = 1, N_l - 1 \quad (2.52)$$

Siendo  $N_l$  la cantidad total de las capas. La ventaja primordial de este método radica en que los resultados de las distribuciones de tanto las deformaciones como los esfuerzos corresponden a un análisis quasi-3D; sin embargo, el costo computacional es bastante más elevado a un análisis de capa equivalente.

#### 2.2.6 Modelamiento por capa equivalente

La capa equivalente representa cada capa como si fuera una sola. Si bien es cierto su costo computacional es bajo respecto al de capa inteligente; sin embargo, la posibilidad de obtener una distribución precisa en cuanto a deformaciones y esfuerzos radica en el tipo de campo a elegir. En la sección subsiguiente se detallará todos los campos a usar en esta tesis.

#### 2.2.7 Modelamiento en base a zigzag

Es un tipo de modelamiento de tipo capa equivalente, que radica en el uso de las coordenadas locales. El termino zigzag se refiere a un cambio de signo por cada capa y ayuda a mejorar el modelamiento de la discontinuidad en las configuraciones de la lámina.

Dicho fenómeno se considera en la figura siguiente:

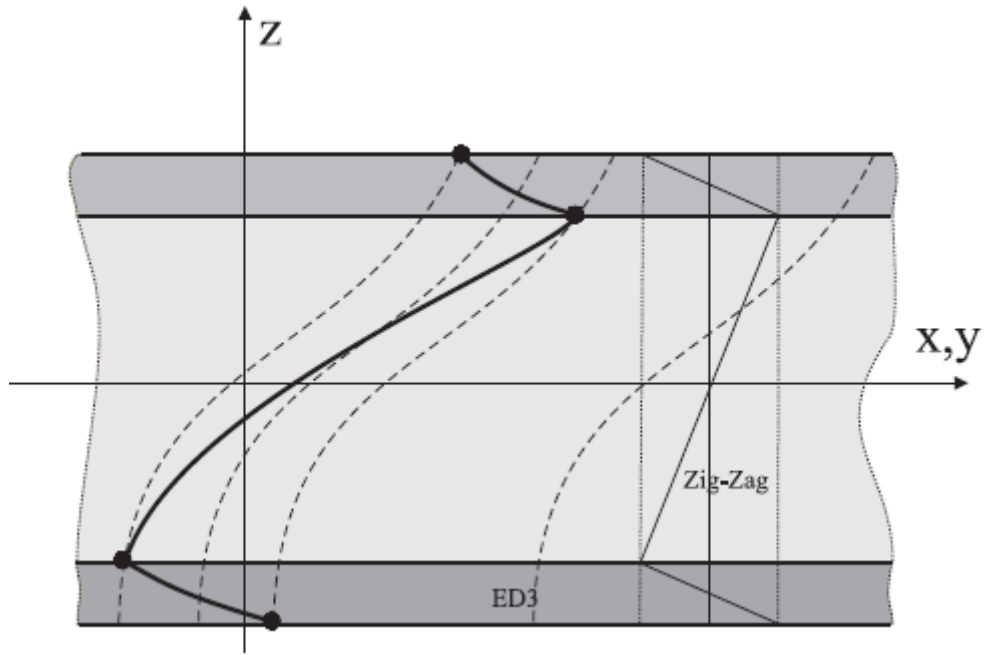


Figura 16 Representación de deformación mediante teoría zigzag [34].

El campo de desplazamiento es el siguiente:

$$u = u_0 + zu_1 + z^2u_2 + z^3u_3 + z^4u_4 + (-1)^k \zeta_k u_5 \quad (2.53)$$

La Figura 16 representa la diferencia principal entre un campo con expansión tres y la inclusión de una función zigzag.

# 3

## Contexto de la investigación

El modelo matemático de la siguiente tesis se basa en el uso de la teoría unificada de Carrera [12] como medio de prueba de diferentes modelos. Adicionalmente, se modelan la geometría de los cascarones mediante principios básicos de geometría diferencial. El material para analizar se encuentra basado en el uso de compuestos laminados ortotrópicos mediante distintas combinaciones de los ángulos  $0^\circ$  y  $90^\circ$ . Se empleará el principio de desplazamiento virtual para poder establecer las ecuaciones parciales que gobiernan el comportamiento mecánico de la estructura. Dichas ecuaciones serán resueltas mediante el método de Navier el cual consiste en el uso de series de Fourier dobles.

Uno de los objetivos principales de la mecánica computacional es reducir el costo computacional. Una estrategia poderosa es escoger distintos tipos de funciones, ya sean polinómicas y no polinómicas, con tal de obtener los errores más bajos respecto a una solución 3D. Este procedimiento es llamado asintótico/axiomático. Esta tesis, pretende usar los mejores campos de desplazamiento presentados en distintas publicaciones [6], [7] para placas y extenderlos a cascarones de curvatura constante. Se debe enfatizar que las publicaciones mencionadas también son analíticas; por lo que, eso valida la extensión de dichos campos de desplazamientos. Adicionalmente serán probados en diferentes tipos de carga transversales los cuales no fueron evaluados en los trabajos descritos.

### 3.1 Modelamiento del campo de deformaciones

Si se considera un campo en base a una extensión de Maclaurin (expansión netamente polinómica) de orden cuatro basado en el contexto de representación de tipo capa equivalente, se tendrá lo siguiente:



$$\begin{aligned}
u_\alpha &= u_{\alpha 0} + zu_{\alpha 1} + z^2u_{\alpha 2} + z^3u_{\alpha 3} + z^4u_{\alpha 4} \\
u_\beta &= u_{\beta 0} + zu_{\beta 1} + z^2u_{\beta 2} + z^3u_{\beta 3} + z^4u_{\beta 4} \\
u_z &= u_{z 0} + zu_{z 1} + z^2u_{z 2} + z^3u_{z 3} + z^4u_{z 4}
\end{aligned} \tag{3.1a-c}$$

Al siguiente campo lo denominaremos como ED4. Si a este campo se le adiciona una expansión con efecto zigzag, se nombrará como ED4Z:

$$\begin{aligned}
u_\alpha &= u_{\alpha 0} + zu_{\alpha 1} + z^2u_{\alpha 2} + z^3u_{\alpha 3} + z^4u_{\alpha 4} + (-1)^k \zeta_k u_{\alpha 5} \\
u_\beta &= u_{\beta 0} + zu_{\beta 1} + z^2u_{\beta 2} + z^3u_{\beta 3} + z^4u_{\beta 4} + (-1)^k \zeta_k u_{\beta 5} \\
u_z &= u_{z 0} + zu_{z 1} + z^2u_{z 2} + z^3u_{z 3} + z^4u_{z 4} + (-1)^k \zeta_k u_{z 5}
\end{aligned} \tag{3.2a-c}$$

Esta tesis, evalúa distintos tipos de funciones de expansiones, ya sean trigonométricas, exponenciales y zigzag. El campo considerado contiene 54 términos, 15 polinomios de Maclaurin, 3 términos zigzag, 24 términos trigonométricos y 12 exponenciales. El desplazamiento fue inspirado en el trabajo de Filippi et al. [35]. A continuación, se dará el campo completo (EDZ17):

$$\begin{aligned}
u &= u_0 + zu_1 + z^2u_2 + z^3u_3 + z^4u_4 + (-1)^k \zeta_k u_5 + \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) u_6 + \sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right) u_7 + \\
&\sin\left(\frac{3\pi z}{h}\right) u_8 + \sin\left(\frac{4\pi z}{h}\right) u_9 + \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) u_{10} + \cos\left(\frac{2\pi z}{h}\right) u_{11} + \cos\left(\frac{3\pi z}{h}\right) u_{12} + \\
&\cos\left(\frac{4\pi z}{h}\right) u_{13} + e^{\frac{z}{h}} u_{14} + e^{\frac{2z}{h}} u_{15} + e^{\frac{3z}{h}} u_{16} + e^{\frac{4z}{h}} u_{17}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Los investigadores Yarasca et al. [6] formaron un robusto campo de deformación considerando las funciones propuestas por Filippi et al. [35] y emplearon los algoritmos axiomáticos/asintóticos y genéticos con tal de adquirir las mejores funciones en casos estáticos para placas. Estos modelos se denominarán modelos refinados (N HRM), donde N es representado como la cantidad de incógnitas. Estos modelos presentados serán extendidos para cascarones y probados en esta tesis para múltiple cantidad de cargas y ratios de espesor ( $a/h$ ) y ratios de la curvatura con respecto al lado ( $R/a$ ). Los campos serán presentados a continuación:

Tabla 3 Modelos híbridos refinados

Modelo	Disp.	$z^N$				$(-1)^k \zeta_k$	$\sin(N \frac{\pi z}{h})$				$\cos(N \frac{\pi z}{h})$				$e^{\frac{Nz}{h}}$					
		0	1	2	3	4	--	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	
12 HRM	U	✓	✓	✓	✓	-	✓	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	V	✓	✓	-	✓	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	W	✓	✓	✓	-	✓	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
15 HRM	U	✓	✓	✓	✓	-	✓	✓	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	V	✓	✓	-	✓	-	✓	-	✓	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	W	✓	✓	✓	-	✓	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
16 HRM	U	✓	✓	-	✓	-	✓	-	-	-	-	✓	-	-	-	✓	-	-	-	-
	V	✓	✓	-	-	-	✓	-	-	-	-	✓	-	-	-	✓	-	✓	-	-
	W	✓	✓	-	-	-	✓	-	-	-	-	-	-	-	-	✓	-	-	-	-
18 HRM	U	✓	✓	✓	✓	-	✓	✓	✓	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	V	✓	✓	-	✓	-	✓	✓	✓	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	W	✓	✓	✓	-	✓	-	-	-	-	-	✓	-	-	-	-	-	-	-	-
20 HRM	U	✓	✓	-	-	-	✓	-	✓	-	-	-	-	-	-	✓	-	✓	-	-
	V	✓	✓	-	-	-	✓	✓	✓	-	-	-	-	-	-	✓	-	✓	-	-
	W	✓	✓	-	-	✓	✓	-	-	✓	-	-	-	-	-	✓	-	-	-	-
21 HRM	U	✓	✓	✓	✓	-	✓	✓	✓	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	V	✓	✓	-	✓	-	✓	✓	✓	-	-	-	-	-	-	✓	✓	-	-	-
	W	✓	✓	✓	-	✓	-	-	-	-	-	✓	-	✓	-	-	-	-	-	-

La notación para entender la tabla es la siguiente: (✓) simboliza las variables que se incluyen en el modelo y (-) las que son omitidas, por ejemplo, para el modelo de 12 incógnitas, se establece el campo siguiente:

$$u_\alpha = u_{\alpha 0} + zu_{\alpha 1} + z^2 u_{\alpha 2} + z^3 u_{\alpha 3} + (-1)^k \zeta_k u_{\alpha 5}$$

$$u_\beta = u_{\beta 0} + zu_{\beta 1} + z^3 u_{\beta 3}$$

$$u_\alpha = u_{\alpha 0} + zu_{\alpha 1} + z^2 u_{\alpha 2} + z^4 u_{\alpha 4} \tag{3.4a-c}$$

Con ese procedimiento se podrán obtener todos los campos refinados de la Tabla 3.

### 3.2 Relación entre las deformación-desplazamiento

En cuanto al contexto, esta tesis solo evaluara paneles con una curvatura de tipo constante, es decir tanto los coeficientes de Lamé ( $A_\alpha$  y  $A_\beta$ ) y radios de curvatura ( $R_\alpha$  y  $R_\beta$ ) se encuentran dado en cuanto a valores numéricos.

La teoría general de relaciones de deformación-desplazamiento, fue tomada de Viola et al. [36]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{H_\alpha} \left( \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{u_\beta}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} + \frac{u_z}{R_\alpha} \right) \\ \varepsilon_{\beta\beta} &= \frac{1}{H_\beta} \left( \frac{u_\alpha}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} + \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{u_z}{R_\beta} \right) \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{H_\alpha} \left( \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} - \frac{u_\alpha}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{H_\beta} \left( \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} - \frac{u_\beta}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \right) \\ \varepsilon_{\alpha z} &= \frac{1}{H_\alpha} \left( -\frac{u_\alpha}{R_\alpha} + \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \\ \varepsilon_{\beta z} &= \frac{1}{H_\beta} \left( -\frac{u_\beta}{R_\beta} + \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial u_z}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial u_\beta}{\partial z} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}\tag{3.5a-f}$$

Basado en las asunciones de curvatura constante, las ecuaciones 3.5a-f se pueden reducir a lo siguiente:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\alpha}^k &= \frac{1}{H_\alpha} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{u_z}{R_\alpha} \right) \\ \varepsilon_{\beta\beta}^k &= \frac{1}{H_\beta} \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{u_z}{R_\beta} \right) \\ \varepsilon_{\alpha\beta}^k &= \frac{1}{H_\alpha} \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{H_\beta} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta} \right) \\ \varepsilon_{\alpha z}^k &= \frac{1}{H_\alpha} \left( -\frac{u_\alpha}{R_\alpha} + \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \\ \varepsilon_{\beta z}^k &= \frac{1}{H_\beta} \left( -\frac{u_\beta}{R_\beta} + \frac{\partial u_z}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial u_\beta}{\partial z} \\ \varepsilon_{zz}^k &= \frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}\tag{3.6a-f}$$

Las ecuaciones anteriores se escriben de forma matricial de la siguiente forma, se puede denotar que  $D_p^k$ ,  $D_{np}^k$  y  $D_{nz}^k$  son operadores diferenciales matriciales. Las matrices  $A_p^k$  y  $A_n^k$  son términos que toman en cuenta la variación a través del espesor de la curvatura. Las relaciones de deformación-desplazamiento se expresan matricialmente en  $\varepsilon_p^k$  que depende de los efectos normales y cortantes en el plano y  $\varepsilon_n^k$  describe los efectos cortantes transversales y transversales normales. El resumen de dichas matrices se describe, a continuación:

$$\varepsilon_p^k = [\varepsilon_{\alpha\alpha}^k \quad \varepsilon_{\beta\beta}^k \quad \gamma_{\alpha\beta}^k]^T, \quad \varepsilon_n^k = [\gamma_{\alpha z}^k \quad \gamma_{\beta z}^k \quad \varepsilon_{zz}^k]^T$$

$$\varepsilon_p^k = (D_p^k + A_p^k)u^k, \quad \varepsilon_n^k = D_n^k u^k = (D_{np}^k + D_{nz}^k - A_n^k)u^k,$$

$$D_p^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{H_\alpha^k} \frac{\partial}{\partial \alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{H_\beta^k} \frac{\partial}{\partial \beta} & 0 \\ \frac{1}{H_\beta^k} \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{1}{H_\alpha^k} \frac{\partial}{\partial \alpha} & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{np}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{H_\alpha^k} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ 0 & 0 & \frac{1}{H_\beta^k} \frac{\partial}{\partial \beta} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{nz}^k = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix},$$

$$A_p^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{H_\alpha^k R_\alpha^k} \\ 0 & 0 & \frac{1}{H_\beta^k R_\beta^k} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_n^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{H_\alpha^k R_\alpha^k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{H_\beta^k R_\beta^k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7a-i)$$

### 3.3 Relación esfuerzo-deformación

El estudio general de los materiales compuestos se basa en los materiales, los cuales deben ser considerados como anisotrópicos, esto implica que no exista ningún plano de simetría para sus propiedades. El conjunto de propiedades de los materiales se expresa a través de sus coeficientes elásticos ( $C_{ij}$ ). Estos coeficientes elásticos en conjunto con las deformaciones que sufre el cuerpo en acción de una fuerza externa son básicos para poder obtener los esfuerzos del cascarón. El tipo de ecuación que relaciona los esfuerzos con las deformaciones y los coeficientes elásticos son llamadas constitutivas. A continuación, se presentará las ecuaciones constitutivas para un material anisotrópicos:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\alpha\alpha}^k \\ \sigma_{\beta\beta}^k \\ \sigma_{\alpha\beta}^k \\ \sigma_{\alpha z}^k \\ \sigma_{\beta z}^k \\ \sigma_{zz}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k & C_{16}^k & C_{14}^k & C_{15}^k & C_{13}^k \\ C_{12}^k & C_{22}^k & C_{26}^k & C_{24}^k & C_{25}^k & C_{23}^k \\ C_{16}^k & C_{26}^k & C_{66}^k & C_{34}^k & C_{35}^k & C_{36}^k \\ C_{14}^k & C_{24}^k & C_{34}^k & C_{44}^k & C_{45}^k & C_{46}^k \\ C_{15}^k & C_{25}^k & C_{35}^k & C_{45}^k & C_{55}^k & C_{56}^k \\ C_{13}^k & C_{23}^k & C_{36}^k & C_{46}^k & C_{56}^k & C_{33}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\alpha\alpha}^k \\ \varepsilon_{\beta\beta}^k \\ \varepsilon_{\alpha\beta}^k \\ \varepsilon_{\alpha z}^k \\ \varepsilon_{\beta z}^k \\ \varepsilon_{zz}^k \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

La siguiente matriz contiene 21 coeficientes elásticos deben ser calculados a fin de poder calcular los esfuerzos en el cascaron. La razón principal por la que algunos de los coeficientes elásticos se consideran simétricos, radica en que tanto para los esfuerzos como para las deformaciones se cumple lo siguiente [9]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, i, j = (\alpha, \beta, z)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, i, j = (\alpha, \beta, z) \quad (3.9a-b)$$

Si uno de los planos de material es simétrico, se conoce como un material monoclinico.

Este sistema reduce la cantidad de coeficientes elásticos a 13:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\alpha\alpha}^k \\ \sigma_{\beta\beta}^k \\ \sigma_{\alpha\beta}^k \\ \sigma_{\alpha z}^k \\ \sigma_{\beta z}^k \\ \sigma_{zz}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k & C_{16}^k & 0 & 0 & C_{13}^k \\ C_{12}^k & C_{22}^k & C_{26}^k & 0 & 0 & C_{23}^k \\ C_{16}^k & C_{26}^k & C_{66}^k & 0 & 0 & C_{36}^k \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^k & C_{45}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45}^k & C_{55}^k & 0 \\ C_{13}^k & C_{23}^k & C_{36}^k & 0 & 0 & C_{33}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\alpha\alpha}^k \\ \varepsilon_{\beta\beta}^k \\ \varepsilon_{\alpha\beta}^k \\ \varepsilon_{\alpha z}^k \\ \varepsilon_{\beta z}^k \\ \varepsilon_{zz}^k \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Si existen tres planos ortogonales de simetría, el número de coeficientes de materiales se reduce a solamente nueve. Estos son conocidos como material ortotrópicos. Este es el modelo de material que será tomado en cuenta para esta tesis; el comportamiento en materiales anisotrópicos y monoclinicos se encuentra pendiente para futuras investigaciones.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\alpha\alpha}^k \\ \sigma_{\beta\beta}^k \\ \sigma_{\alpha\beta}^k \\ \sigma_{\alpha z}^k \\ \sigma_{\beta z}^k \\ \sigma_{zz}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k & 0 & 0 & 0 & C_{13}^k \\ C_{12}^k & C_{22}^k & 0 & 0 & 0 & C_{23}^k \\ 0 & 0 & C_{66}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^k & 0 \\ C_{13}^k & C_{23}^k & 0 & 0 & 0 & C_{33}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\alpha\alpha}^k \\ \varepsilon_{\beta\beta}^k \\ \varepsilon_{\alpha\beta}^k \\ \varepsilon_{\alpha z}^k \\ \varepsilon_{\beta z}^k \\ \varepsilon_{zz}^k \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Teniendo en cuenta la última ecuación presentada, Carrera [12] propone una manera matricial de ver estas relaciones esfuerzo-deformación.

$$\sigma_p^k = [\sigma_{\alpha\alpha}^k \quad \sigma_{\beta\beta}^k \quad \sigma_{\alpha\beta}^k]^T, \quad \sigma_n^k = [\sigma_{\alpha z}^k \quad \sigma_{\beta z}^k \quad \sigma_{zz}^k]^T \quad (3.12a-b)$$

Al igual que en el caso de las deformaciones, el primero corresponde a los esfuerzos normales y cortantes en el plano y los segundos a los cortantes transversales y transversal normal. De forma generalizada se tiene en cuenta lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma_p^k &= C_{pp}^k \varepsilon_p^k + C_{pn}^k \varepsilon_n^k \\ \sigma_n^k &= C_{np}^k \varepsilon_p^k + C_{nn}^k \varepsilon_n^k \end{aligned} \quad (3.13a-b)$$

Donde los coeficientes de los materiales se resumen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} C_{pp}^k &= \begin{bmatrix} C_{11}^k & C_{12}^k & C_{16}^k \\ C_{12}^k & C_{22}^k & C_{26}^k \\ C_{16}^k & C_{26}^k & C_{66}^k \end{bmatrix}, C_{pn}^k = \begin{bmatrix} 00 & C_{13}^k \\ 00 & C_{23}^k \\ 00 & C_{36}^k \end{bmatrix} \\ C_{np}^k &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^k & C_{23}^k & C_{36}^k \end{bmatrix}, C_{nn}^k = \begin{bmatrix} C_{44}^k & C_{45}^k & 0 \\ C_{45}^k & C_{55}^k & 0 \\ 0 & 0 & C_{33}^k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.14a-d)$$

Se reporta como se calculan dichos coeficientes en función a las propiedades mecánicas. Estas son: el módulo de elasticidad  $E_1, E_2, E_3$ , los módulos de poisson  $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$  y los módulos en cortantes  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$ . En primer lugar, se deben calcular los módulos de Poisson  $\nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{32}$ , en función a la siguiente ecuación:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (3.15)$$

Posteriormente, se establece las siguientes ecuaciones en torno a los coeficientes de material:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, C_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} \\ C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \\ C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \end{aligned}$$

$$C_{44} = G_{23}, C_{55} = G_{13}, C_{66} = G_{12}$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \quad (3.16a-j)$$

Se establece que los coeficientes  $C_{44}$ ,  $C_{55}$  y  $C_{66}$  se relacionan directamente con los módulos en cortantes y  $\Delta$  representa una relación importante entre los módulos de poisson y de elasticidad.

Las propiedades de los materiales pueden rotar en función a la orientación de la fibra.

La imagen indica la posición del Angulo de rotación ( $\vartheta$ ):

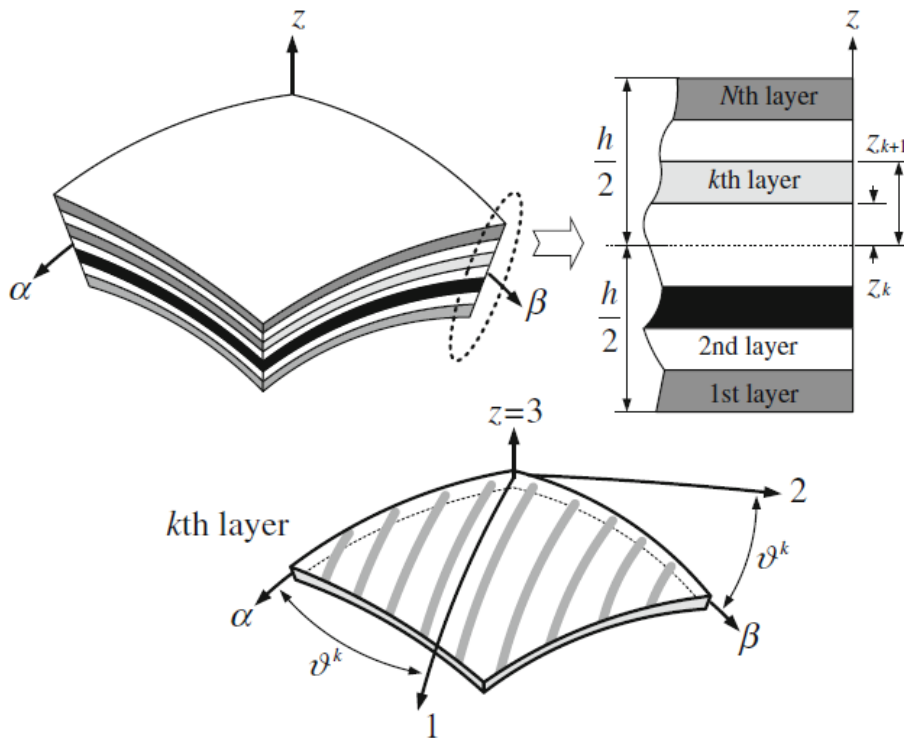


Figura 17 Lámina de rotación bajo cierto ángulo  $\vartheta$  [10].

La siguiente es la matriz de rotación para poder calcular los coeficientes de rotación equivalentes.

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2(\vartheta) & \sin^2(\vartheta) & -\sin(2\vartheta) & 0 & 0 & 0 \\ \sin^2(\vartheta) & \cos^2(\vartheta) & \sin(2\vartheta) & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) & \cos(2\vartheta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Debido a la limitación de los alcances de la tesis como el modelamiento de cascarones de materiales ortotrópicos, el ángulo de rotación solo puede ser considerado como 0 o 90, sin embargo, aunque sea bastante limitado, esto sirve para poder desarrollar diversos casos tanto académicos como industriales.

Las propiedades equivalentes por cada lámina se calculan basado en las ecuaciones de Reddy [8].

$$[\bar{C}] = [T][C][T]^T \quad (3.18)$$

Teniendo esto en cuenta, las relaciones de esfuerzo-deformación pueden ser escritas:

$$\begin{aligned} \sigma &= [T][C][T]^T \varepsilon \\ \sigma &= [\bar{C}]\varepsilon \end{aligned} \quad (3.19)$$

### 3.4 Principio de trabajo virtual

El principio de desplazamiento virtual se encuentra representado por dos funciones de energía:  $\delta L_{int}$  que simbolizan la variación de trabajo interno generado por deformaciones y  $\delta L_{ext}$  se interpreta como el trabajo la variación del trabajo externo generado por fuerzas externas. Expresado de una forma fácil, podemos llegar a la conclusión de que todo cuerpo se deforma por acción de una fuerza externa. Escrito de forma matemática, se presenta la ecuación:

$$\delta L_{int} = \delta L_{ext} \quad (3.20)$$

Considerado la interpretación del trabajo interno, se refiere a las deformaciones generadas por acción de fuerzas externas, se puede notar que esto se representa directamente en la primera línea de la ecuación presentada, a continuación. La segunda línea es representada como el trabajo generado por la carga. Se resalta que cada uno de los términos está asociado a cada nivel de capa ( $k$ ).

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_l} \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \{ \delta \varepsilon_p^{kT} \sigma_p^k + \delta \varepsilon_n^{kT} \sigma_n^k \} H_\alpha^k H_\beta^k d\Omega_k dz = \\ \sum_{k=1}^{N_l} \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \{ \delta u^k p^k \} H_\alpha^k H_\beta^k d\Omega_k dz \end{aligned} \quad (3.21)$$



El primer paso para resolver la ecuación anterior presentada es reemplazar las ecuaciones constitutivas (3.13a-b):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_l} \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \left\{ \delta \varepsilon_p^{kT} (C_{pp}^k \varepsilon_p^k + C_{pn}^k \varepsilon_n^k) + \delta \varepsilon_n^{kT} (C_{np}^k \varepsilon_p^k + C_{nn}^k \varepsilon_n^k) \right\} H_\alpha^k H_\beta^k d\Omega_k dz = \\ \sum_{k=1}^{N_l} \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \{ \delta u^k p^k \} H_\alpha^k H_\beta^k d\Omega_k dz \end{aligned} \quad (3.22)$$

Luego, se reemplaza las ecuaciones en torno a la relación de deformaciones-desplazamiento presentadas en (3.7c-d):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_l} \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \left\{ (D_p^k + A_p^k) \delta u^k \right\}^T \left( (C_{pp}^k (D_p^k + A_p^k) + C_{pn}^k (D_{np}^k + D_{nz}^k - A_n^k)) u^k + \right. \\ \left. ((D_{np}^k + D_{nz}^k - A_n^k) (\delta u^k))^T (C_{np}^k (D_p^k + A_p^k) + C_{nn}^k (D_{np}^k + D_{nz}^k - \right. \\ \left. A_n^k)) u^k \right\} H_\alpha^k H_\beta^k d\Omega_k dz = \sum_{k=1}^{N_l} \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \{ \delta u^k p^k \} H_\alpha^k H_\beta^k d\Omega_k dz \end{aligned} \quad (3.23)$$

El próximo paso radica en reemplazar los campos de deformación propuestos en (2.45-2.46) tanto en su forma original como su variacional:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_l} \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \left\{ ((D_p^k + A_p^k) (F_\tau \delta u_\tau^k))^T (C_{pp}^k (D_p^k + A_p^k) + C_{pn}^k (D_{np}^k + D_{nz}^k - A_n^k)) F_s u_s^k + \right. \\ \left. ((D_{np}^k + D_{nz}^k - A_n^k) (F_\tau \delta u_\tau^k))^T (C_{np}^k (D_p^k + A_p^k) + C_{nn}^k (D_{np}^k + D_{nz}^k - \right. \\ \left. A_n^k)) F_s u_s^k \right\} H_\alpha^k H_\beta^k d\Omega_k dz = \sum_{k=1}^{N_l} \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \{ \delta u_\tau^k p^k \} F_\tau H_\alpha^k H_\beta^k d\Omega_k dz \end{aligned} \quad (3.24)$$

La parte matemática presentada hasta el momento corresponde a un análisis enteramente en forma débil y esto solucionaría problemas tales como Ritz o elementos finitos. La forma débil (“weak form”) se refiere a una integración en tres dimensiones es decir tanto en el dominio de la sección del plano medio ( $\Omega_k$ ) como a través del espesor de todo el cascarón. La tesis propuesta representa un análisis de forma fuerte (“strong form”) en la cual se requiere únicamente de una integración a través del espesor. Para poder obtener la forma fuerte se necesita de una técnica matemática llamada integración por partes en la cual se subdivide la ecuación en dos partes un entorno al plano medio y otra respecto al borde  $\Gamma_k$ , teniendo en cuenta ciertas condiciones de contorno que serán expuestas más adelante.

Para una variable general  $a^k$ , la integración por partes [37] se encuentra determinada por:

$$\int_{A_k} \left( (D_{A_k}) \delta a^k \right)^T d\Omega_k = - \int_{A_k} \delta a^k T \left( (D_{A_k})^T a^k \right) d\Omega_k + \int_{\Gamma_k} \delta a^k T ((I_\Omega^k) a^k) d\Gamma_k \quad (3.25)$$

A continuación, se procederá a implementar la técnica de integración por partes a la ecuación presentada en (3.24):

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{N_l} \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \left( (u_\tau^k)^T \left( (D_p^k + A_p^k)^T (C_{pp}^k (D_p^k + A_p^k) + C_{pn}^k (D_{np}^k + D_{nz}^k - A_n^k)) \right) + \right. \\
& \left. (-D_{np}^k + D_{nz}^k - A_n^k)^T (C_{np}^k (D_p^k + A_p^k) + C_{nn}^k (D_{np}^k + D_{nz}^k - \right. \\
& \left. A_n^k)) \right) u_s^k F_\tau F_s H_\alpha^k H_\beta^k d\Omega_k dz + \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \left( (u_\tau^k)^T \left( (I_p)^T (C_{pp}^k (D_p^k + A_p^k) + C_{pn}^k (D_{np}^k + \right. \right. \\
& \left. \left. D_{nz}^k - A_n^k)) \right) + (I_{np})^T (C_{np}^k (D_p^k + A_p^k) + C_{nn}^k (D_{np}^k + D_{nz}^k - \right. \\
& \left. A_n^k)) \right) u_s^k F_\tau F_s H_\alpha^k H_\beta^k d\Gamma_k dz = \sum_{k=1}^{N_l} \int_{\Omega_k} \int_{A_k} \{\delta u_\tau^k p^k\} F_\tau H_\alpha^k H_\beta^k d\Omega_k dz \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Este fue el paso final para poder obtener nuestras ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de un cascaron de curvatura constante. La representación de las matrices  $I_p$  y  $I_{np}$  se encuentra directamente vinculada con el cálculo de la integración por partes. Se encuentran representadas de la forma siguiente [12]:

$$I_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{H_\alpha^k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{H_\beta^k} & 0 \\ \frac{1}{H_\beta^k} & \frac{1}{H_\alpha^k} & 0 \end{bmatrix}, I_{np} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{H_\alpha^k} \\ 0 & 0 & \frac{1}{H_\beta^k} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27a-b)$$

Se pretende entregar las ecuaciones diferenciales las cuales gobiernan el comportamiento estático de cascarones en torno a un núcleo fundamental ( $K_{uu}^{k\tau s}$ ) y a un vector de carga ( $P_\tau^k$ ). Se establece lo siguiente:

$$K_{uu}^{k\tau s} u_s^k = P_\tau^k \quad (3.28)$$

El núcleo es directamente extraído de la ecuación (3.26):

$$\begin{aligned}
K_{uu}^{k\tau s} = \int_{A_k} & (-F_\tau D_p^k + F_\tau A_p^k)^T (C_{pp}^k (F_s D_p^k + F_s A_p^k) + C_{pn}^k (F_s D_{np}^k + F_{sz} - F_s A_n^k)) \\
& + (-F_\tau D_{np}^k + F_{tz} - F_\tau A_n^k)^T (C_{np}^k (F_s D_p^k + F_s A_p^k)) \\
& + C_{nn}^k (F_s D_{np}^k + F_{sz} - F_s A_n^k) F_\tau F_s H_\alpha^k H_\beta^k dz \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Hasta el momento las ecuaciones que se obtienen se encuentran en términos con ecuaciones diferenciales parciales, están deben ser resueltas a fin de poder terminar las

incógnitas de los campos de desplazamiento. Una forma de resolver dichas ecuaciones radica en el uso de las series de Fourier de dos variables, en la literatura se refiere a solución como el método de Navier (únicamente valido para materiales ortotrópicos y cascarones con una curvatura constante y condición de contorno como simplemente apoyado). Este método posee una ventaja en cuanto a su bajo costo computacional y permite acoplar distintos tipos de carga teniendo en cuenta un cierto número de sumatoria de los armónicos. Las sumatoria respecto a cada incógnita son expresadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 u_{\alpha_s}^k &= \sum_{m,n} U_{\alpha_s}^k \cos\left(\frac{\pi m}{a} \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} \beta\right) \\
 u_{\beta_s}^k &= \sum_{m,n} U_{\beta_s}^k \sin\left(\frac{\pi m}{a} \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi n}{b} \beta\right) \\
 u_{z_s}^k &= \sum_{m,n} U_{z_s}^k \sin\left(\frac{\pi m}{a} \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} \beta\right)
 \end{aligned} \tag{3.30a-c}$$

En cuanto al modelamiento de la carga (en esta tesis solo presentara resultados de las cargas de tipo transversal), se presenta de la siguiente forma:

$$p_{z_s}^k = \sum_{m,n} P_{z_s}^k \sin\left(\frac{\pi m}{a} \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} \beta\right) \tag{3.31}$$

Los coeficientes de la carga se pueden tomar de la siguiente forma:

$$P_{z_s}^k = \int_0^a \int_0^b p_{z_s}^k \sin\left(\frac{\pi m}{a} \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} \beta\right) d\alpha d\beta \tag{3.32}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier son fundamentales a fin de obtener cualquier tipo de carga. En esta tesis, solo expondremos carga bisinusoidal, distribuida, distribuida localizada, hidrostática transversal y puntual. Las imágenes de cada una de las cargas serán presentadas en la tercera sección, conforme sea expuesto cada una de esas cargas. Los coeficientes serán expuestos en la tabla siguiente:

Tabla 4 Coeficientes para distintos tipos de carga

Carga	Fórmula matemática	Coeficiente
Bisinusoidal	$p_{z_s(\alpha,\beta)}^k = P_z \sin\left(\frac{m\pi}{a} \alpha\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} \beta\right)$	$P_{z_s}^k = p_{z_s}^k, (m, n) = 1$
Uniforme	$p_{z_s(\alpha,\beta)}^k = P_z$	$P_{z_s}^k = \frac{16p_{z_s}^k}{\pi^2 mn}, (m, n) = 1, 3, 5, \dots$
Distribuida localizada	$p_{z_s(\alpha,\beta)}^k = P_z, \text{ en } \alpha_0 - \frac{u}{2} \leq \alpha \leq \alpha_0 + u/2, \beta_0 - \frac{v}{2} \leq \beta \leq \beta_0 + v/2$	$P_{z_s}^k = \frac{16p_{z_s}^k}{\pi^2 mn} \sin\left(\frac{m\pi\alpha_0}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi u}{2a}\right) \sin\left(\frac{n\pi\beta_0}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi v}{2b}\right), (m, n) = 1, 2, 3 \dots$

Hidrostática transversal	$p_{z_s(\alpha,\beta)}^k = P_z \frac{\alpha}{a}$	$P_{z_s}^k = \frac{8p_{z_s}^k \cos(m\pi)}{\pi^2 mn}, (m, n) = 1, 3, 5, \dots$
Puntual	$p_{z_s(\alpha,\beta)}^k = P_z, \text{ en } (\alpha_0, \beta_0)$	$P_{z_s}^k = \frac{4p_{z_s}^k}{ab} \sin\left(\frac{m\pi\alpha_0}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi\beta_0}{b}\right), (m, n) = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

La imagen presentada a continuación es una interpretación de las condiciones que implica la condición simplemente apoyado:

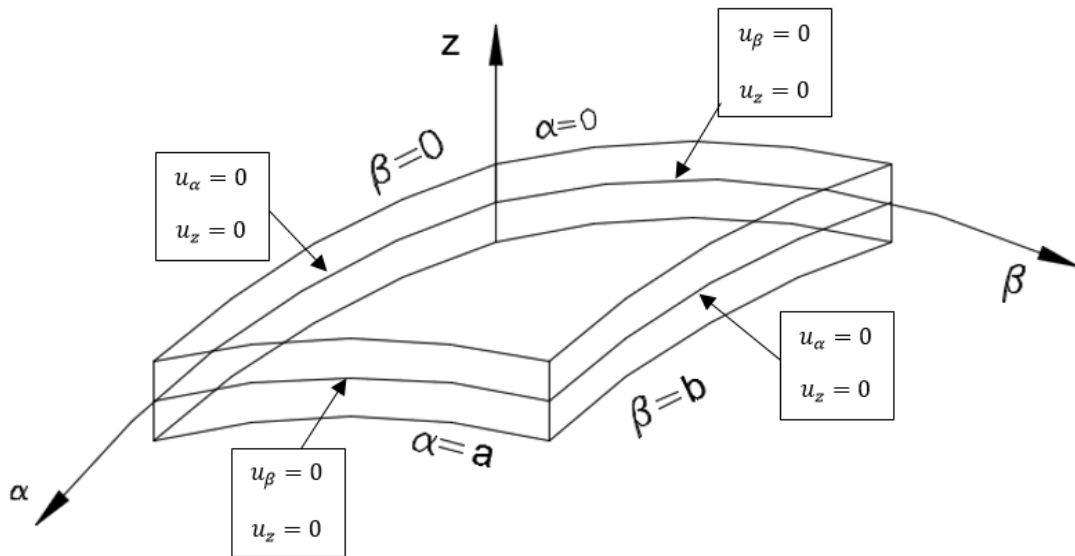


Figura 18 Condiciones para simplemente apoyado.

La imagen anterior deja bastante claro las posibilidades de movimiento para un cascaron con todos los extremos simplemente apoyados.

En torno al análisis matemático posterior del núcleo fundamental se deben desarrollar las operaciones matemáticas presentadas en (3.29) multiplicando las distintas matrices. El núcleo fundamental posee distintas integraciones respecto a diferentes combinaciones en cuanto a las funciones de espesor  $F_\tau$  y  $F_s$  y los coeficientes métricos  $H_\alpha^k$  y  $H_\beta^k$ . Dichas combinaciones se presentan en (3.33a-d):

$$(J_{\frac{\alpha}{\beta}}^{k\tau s}, J_{\frac{\beta}{\alpha}}^{k\tau s}) = \int_{A_k} (F_\tau F_s, F_\tau F_s \frac{H_\alpha^k}{H_\beta^k}, F_\tau F_s \frac{H_\beta^k}{H_\alpha^k}) dz$$

$$(J_{\alpha}^{k\tau_z s}, J_{\beta}^{k\tau_z s}) = \int_{A_k} (F_{\tau z} F_s H_\alpha^k, F_{\tau z} F_s H_\beta^k) dz$$

$$\begin{aligned}
(J_{\alpha}^{k\tau s_z}, J_{\beta}^{k\tau s_z}) &= \int_{A_k} (F_{\tau} F_{s_z} H_{\alpha}^k, F_{\tau} F_{s_z} H_{\beta}^k) dz \\
J_{\alpha\beta}^{k\tau s_z} &= \int_{A_k} F_{\tau} F_{s_z} H_{\alpha}^k H_{\beta}^k dz
\end{aligned} \tag{3.33a-d}$$

El siguiente es el núcleo propiamente dicho, el cual será la base para la completa programación de los casos presentados en esta tesis:

$$\begin{aligned}
K_{uu11} &= C_{55}^k J_{\alpha\beta}^{k\tau s_z} + \frac{C_{55}^k}{R_{\alpha}^k} \left( -J_{\beta}^{k\tau s_z} - J_{\beta}^{k\tau z s} + \frac{1}{R_{\alpha}^k} J_{\alpha}^{k\tau s} \right) + C_{11}^k J_{\beta}^{k\tau s} \alpha^2 + C_{66}^k J_{\beta}^{k\tau s} \beta^2 \\
K_{uu12} &= J^{k\tau s} \alpha \beta (C_{12}^k + C_{66}^k) \\
K_{uu13} &= C_{55}^k \left( J_{\beta}^{k\tau z s} \alpha - \frac{1}{R_{\alpha}^k} J_{\beta}^{k\tau s} \alpha \right) - C_{13}^k J_{\beta}^{k\tau s_z} \alpha - \frac{C_{11}^k}{R_{\alpha}^k} J_{\beta}^{k\tau s} \alpha - \frac{C_{12}^k}{R_{\beta}^k} J^{k\tau s} \alpha \\
K_{uu21} &= J^{k\tau s} \alpha \beta (C_{12}^k + C_{66}^k) \\
K_{uu22} &= C_{44}^k J_{\alpha\beta}^{k\tau s_z} + \frac{C_{44}^k}{R_{\beta}^k} \left( -J_{\alpha}^{k\tau s_z} - J_{\alpha}^{k\tau z s} + \frac{1}{R_{\beta}^k} J_{\alpha}^{k\tau s} \right) + C_{22}^k J_{\alpha}^{k\tau s} \beta^2 + C_{66}^k J_{\alpha}^{k\tau s} \alpha^2 \\
K_{uu23} &= C_{44}^k \left( J_{\beta}^{k\tau z s} \beta - \frac{1}{R_{\alpha}^k} J_{\alpha}^{k\tau s} \beta \right) - C_{23}^k J_{\alpha}^{k\tau s_z} \beta - \frac{C_{22}^k}{R_{\beta}^k} J_{\alpha}^{k\tau s} \beta - \frac{C_{12}^k}{R_{\alpha}^k} J^{k\tau s} \beta \\
K_{uu31} &= C_{55}^k J_{\beta}^{k\tau s_z} \alpha - \frac{C_{55}^k}{R_{\beta}^k} J_{\beta}^{k\tau s} \alpha - C_{13}^k J_{\beta}^{k\tau z s} \alpha - \frac{C_{11}^k}{R_{\alpha}^k} J_{\beta}^{k\tau s} \alpha - \frac{C_{12}^k}{R_{\beta}^k} J^{k\tau s} \alpha \\
K_{uu32} &= C_{44}^k J_{\alpha}^{k\tau s_z} \beta - \frac{C_{44}^k}{R_{\alpha}^k} J_{\alpha}^{k\tau s} \beta - C_{23}^k J_{\alpha}^{k\tau z s} \beta - \frac{C_{22}^k}{R_{\beta}^k} J_{\alpha}^{k\tau s} \beta - \frac{C_{12}^k}{R_{\alpha}^k} J^{k\tau s} \beta \\
K_{uu33} &= C_{55}^k J_{\beta}^{k\tau s} \alpha^2 + C_{44}^k J_{\alpha}^{k\tau s} \beta^2 + C_{33}^k J_{\alpha\beta}^{k\tau s_z} + \frac{1}{R_{\alpha}^k} \left( \frac{C_{11}^k}{R_{\alpha}^k} J_{\beta}^{k\tau s} + C_{13}^k J_{\beta}^{k\tau s_z} + C_{13}^k J_{\beta}^{k\tau z s} \right) + \\
&\quad \frac{1}{R_{\beta}^k} \left( \frac{C_{22}^k}{R_{\beta}^k} J_{\alpha}^{k\tau s} + C_{23}^k J_{\alpha}^{k\tau s_z} + C_{23}^k J_{\alpha}^{k\tau z s} \right) + \frac{2C_{12}^k}{R_{\alpha}^k R_{\beta}^k} J^{k\tau s}
\end{aligned} \tag{3.34a-i}$$

Lo anteriormente presentado es lo que se debe programar, ya sea desde la perspectiva de capa equivalente o inteligente. Existe una diferencia en cuanto a las dos perspectivas para modelar los coeficientes métricos  $H_{\alpha}^k$  y  $H_{\beta}^k$  [37]. Bajo ESL los coeficientes métricos no varían con respecto a cada capa, en esta tesis se consideró respecto al plano medio del cascaron:

$$H_{\alpha}^k = 1 + \frac{z}{R_{\alpha}^k}, H_{\beta}^k = 1 + \frac{z}{R_{\beta}^k} \tag{3.35a-b}$$

La perspectiva LW posee una mayor complejidad de la programación para los coeficientes métricos, considera la coordenada local (ver 2.2.5), es decir, se calcula por cada capa:

$$H_{\alpha}^k = 1 + \frac{\zeta_k}{R_{\alpha}^k}, H_{\beta}^k = 1 + \frac{\zeta_k}{R_{\beta}^k} \quad (3.36a-b)$$

Las siguientes imágenes representan la manera correcta de programación para cada una de las perspectivas:

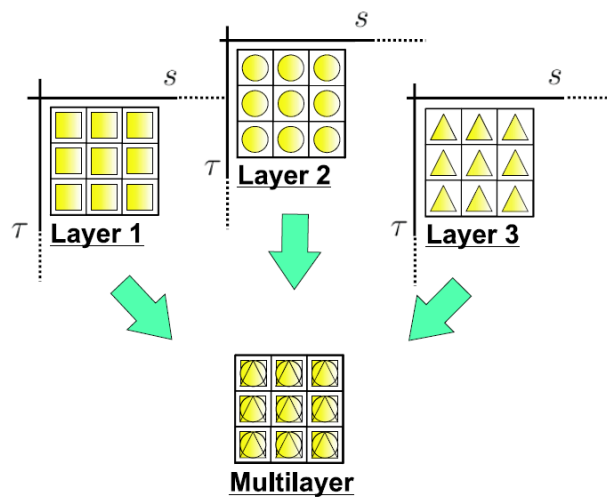


Figura 19 Programación para modelo de capa equivalente (ESL) [37].

Tal como se aprecia, el modelo ESL radica en una sumatoria de los núcleos fundamentales por cada capa. Es decir, si te tiene un cascarón de tres capas, simplemente se suman los tres núcleos fundamentales, referentes a las diferentes laminaciones.

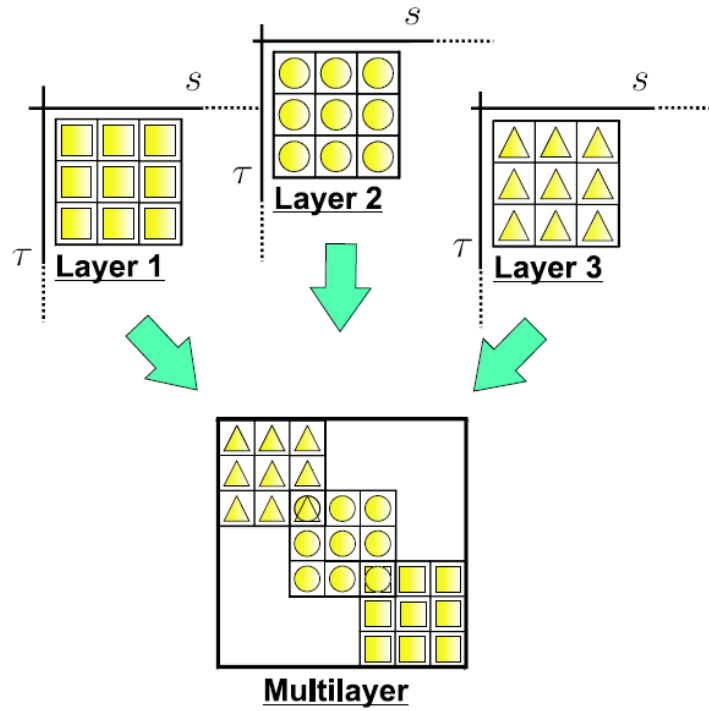


Figura 20 Representación por capa equivalente (LW) [37].

El modelo de capa equivalente crea claramente una interfaz en el núcleo, el ensamble asegura una perfecta continuidad en las distribuciones de esfuerzos y deformaciones. El costo computacional es mayor respecto a un ESL; debido a que, la dimensión del núcleo fundamental depende directamente del número de capas.

# 4

## Caso de estudio

El análisis estático de cascarones simplemente apoyado será tratado en esta sección. La geometría en este caso será considerada como un cascaron cuadrado cuyas medias de los lados son:  $a = b = 1\text{m}$ . Las ratios de curvatura tienen igual longitud  $R_\alpha = R_\beta = R$ . Su medida es determina mediante el ratio entre la curvatura y la longitud del lado ( $R/a$ ). Diferentes ratios de espesor serán evaluados ( $a/h$ ). El primer caso corresponde a un panel con una secuencia de laminación 0/90/0, el caso originalmente fue evaluado por los investigadores Reddy y Liu [13]. La estructura tipo cascaron propuesta será sometido a cinco tipos de cargas transversales diferentes. Las cargas son las siguientes: bisinusoidal, distribuida uniforme, distribuida localizada, hidrostática y puntual. Los resultados son comparados con algunas teorías de orden superior propuestas en la literatura. El segundo caso es una extensión de un problema propuesto por el profesor Luciano Demasi [14]. Originalmente fue propuesto considerando la geometría como placa y en este trabajo se extenderá a una geometría tipo panel con dos radios de curvatura.



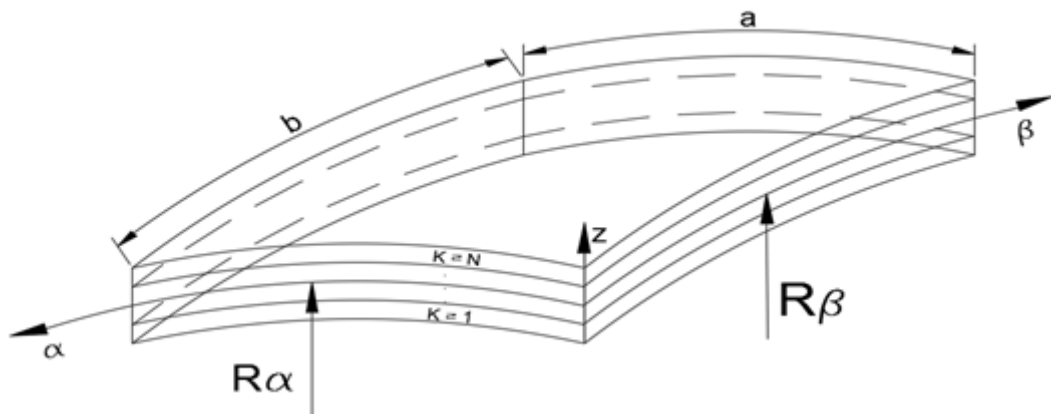


Figura 21 Representación del cascarón.

#### 4.1 Caso 1: Reddy y Liu

El material para este caso fue tomado en base al trabajo de 1985 propuesto por los autores Reddy y Liu [13]. Las propiedades mecánicas son presentadas en la tabla siguiente:

Tabla 5 Propiedades mecánicas para el caso 1.

Propiedades	Valor numérico
$E_1(GPa)$	25
$E_2(GPa)$	1
$E_3(GPa)$	1
$G_{12}(GPa)$	0.5
$G_{13}(GPa)$	0.5
$G_{23}(GPa)$	0.2
$\nu_{12}$	0.25
$\nu_{13}$	0.25
$\nu_{23}$	0.25

La laminación para analizar es 0/90/0. Los resultados que se presentaran se encuentran vinculados a la deformación transversal  $\bar{w}$  y a los esfuerzos normales  $\sigma_{\alpha\alpha}$ , el cortante en el plano  $\sigma_{\alpha\beta}$ , los cortantes transversales  $\sigma_{\alpha z}$  y  $\sigma_{z\beta}$  y el transversal normal  $\sigma_{zz}$ . Los resultados de las tablas presentadas para este caso serán evaluados en sus coordenadas  $\alpha$  y  $\beta$  en sus puntos donde se maximice sus incógnitas en torno a las series de Fourier

presentadas en Ecuación 3.30a-c. Respecto, a la evaluación bajo la coordenada z estas se dan en puntos escogidos por Giunta et al. [38]. En este contexto, la siguiente tabla resume los puntos de evaluación para este caso:

Tabla 6 Puntos de evaluación para el caso 1.

Parámetro	Punto de evaluación
$w$	$(a/2, b/2, 0)$
$\sigma_{\alpha\alpha}$	$(a/2, b/2, h/2)$
$\sigma_{\alpha\beta}$	$(0, b/2, h/2)$
$\sigma_{\alpha z}$	$(a/2, 0, 0)$
$\sigma_{\beta z}$	$(a/2, 0, 0)$

Los resultados de tablas y gráficos serán presentados de forma adimensional bajo ciertas normalizaciones:

$$\bar{w} = 10^3 \frac{E_2 h^3}{P_z \alpha^4} u_z, (\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}, \bar{\tau}_{\alpha\beta}, \bar{\tau}_{\alpha z}, \bar{\tau}_{\beta z}) = \frac{h^2}{\alpha^2 P_z} (\sigma_{\alpha\alpha}, \tau_{\alpha z}, \tau_{\beta z}), \bar{\sigma}_{zz} = 10 \frac{1}{P_z} \sigma_{zz} \quad (4.1a-c)$$

Los campos de deformación fueron presentados en la tabla 3 específicamente en este caso únicamente de emplearán los campos de 12, 15, 18 y 21 incógnitas, los 2 restantes serán empleados para el problema de Demasi. En todos los casos propuestos se asume  $P_z = 1MPa$ .

#### 4.1.1 Análisis bajo carga bisinusoidal

Una carga transversal bisinusoidal con parámetros:  $m, n = 1$  y es aplicada a cascaron (ver Tabla 4). La aplicación directa de la carga bisinusoidal radica en que es una forma sencilla de poder probar la solución de Navier; ya que, no requiere de una sumatoria de amplitudes, como es el caso de las demás cargas que serán expuestas posteriormente.

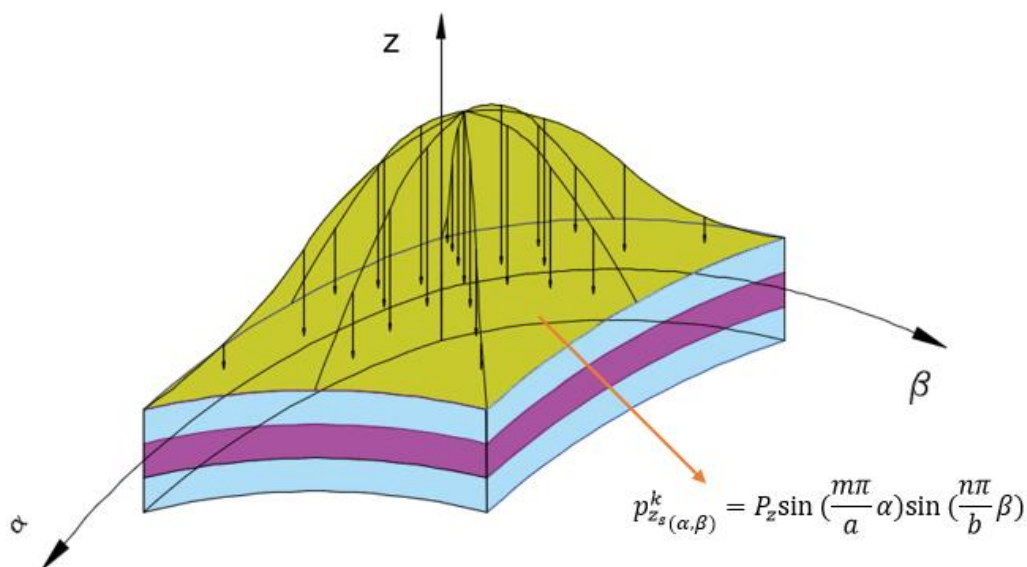


Figura 22 Cascarón sometido a carga bisinusoidal.

Los resultados para el desplazamiento transversal normalizado para un panel con un ratio de espesor  $a/h = 5$  se presenta en la tabla siguiente. Los resultados se comparan con soluciones 3D propuestas por el autor Huang [39] adicionalmente se incluyen resultados de teoría de orden superior propuestas por Xiao-Ping Shu [40] y “el señor de los cascarones” el gran Francesco Tornabene [41]. Se compara también respecto a una solución tipo LD4 (ver sección 2.2.5), este código fue programado a fin de tener una solución cercana a los resultados propuestos por una solución 3D. La solución ED4 también fue reportada (ver Ecuación 3.1). El porcentaje de error se calcula respecto a la teoría 3D. Se puede notar que el porcentaje de error máximo presentado fueron menores a 0.7%,0.45%,0.4%,0.1% para modelos reducidos con 12, 15, 18 y 21 incógnitas, respectivamente. El error para la solución ED4 es de 6.15%. Y para las placas el desplazamiento es muy próximo a la solución 3D. El porcentaje de error de los modelos refinados aumenta en cuanto se disminuye a la relación  $R/a$ .

Tabla 7 Deformaciones transversales considerando  $a/h=5$ .

R/a	2	Diff. (%)	5	Diff. (%)	Plate	Diff. (%)
-----	---	--------------	---	--------------	-------	--------------

Elasticity 3D [39]	1.4820	--	1.5490	--	1.5250	--
Huang [39]	1.4200	4.1835	1.4610	5.6811	1.4420	5.4426
Shu [40]	1.4820	0.0000	1.5460	0.1937	--	--
Tornabene et al. [41]	1.4830	-0.0675	1.5455	0.2260	--	--
LD4	1.4291	3.7019	1.5165	2.1418	1.5253	-0.0172
ED4	1.4038	5.2735	1.4564	5.9786	1.4316	6.1231
12 HRM	1.4721	0.6704	1.5425	0.4218	1.5192	0.3793
15 HRM	1.4757	0.4235	1.5469	0.1379	1.5237	0.0880
18 HRM	1.4765	0.3699	1.5479	0.0735	1.5247	0.0214
21 HRM	1.4807	0.0905	1.5486	0.0234	1.5247	0.0224

La Tabla 7 reporta resultados de desplazamientos y esfuerzos para un cascaron delgado con una relación de espesor de  $a/h=100$ . El porcentaje de error se calculó en base a una solución LD4. Los resultados demostraron que al aumentar el número de incógnitas se disminuye el porcentaje de error de los esfuerzos transversales cortantes  $\bar{\sigma}_{\beta z}$ ; sin embargo, existe una pequeña diferencia para el  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  respecto a lo obtenido con un modelo de 18 y 21 incógnitas. Se puede notar que el porcentaje de error con 12 incógnitas para el esfuerzo  $\bar{\sigma}_{\beta z}$  tiene un porcentaje de error parecido a la solución ED4 con 15 variables. Los resultados de desplazamientos transversales son bastante próximos a una solución LD4 en todos los campos propuestos. Tanto el valor numérico de las deformaciones como de los esfuerzos aumenta con respecto al ratio  $R/a$ .

Tabla 8 Resultados de deformaciones transversales, esfuerzo normal y esfuerzos cortantes transversales para  $a/h=100$ , bajo carga bisinusoidal.

R/a	Model	$\bar{w}$	Diff (%)	10 x $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$	Diff (%)	10 <sup>3</sup> x $\bar{\sigma}_{\alpha z}$	Diff (%)	10 <sup>3</sup> x $\bar{\sigma}_{\beta z}$	Diff (%)
5	LD4	1.0367	--	1.5555	--	0.93395	--	1.96566	--
	ED4	1.0361	0.0526	1.5580	-0.1643	0.66693	28.5904	1.74654	11.1475
	12 HRM	1.0364	0.0310	1.5569	-0.0912	0.94939	-1.6524	1.74645	11.1524
	15 HRM	1.0364	0.0310	1.5569	-0.0912	0.94859	-1.5674	1.78004	9.4435
	18 HRM	1.0364	0.0310	1.5569	-0.0920	0.94438	-1.1161	1.92204	2.2196

	21 HRM	1.0364	0.0275	1.5570	-0.0949	0.94441	-1.1196	1.92142	2.2510
20	LD4	3.6240	--	4.7366	--	3.2887	--	6.9021	--
	ED4	3.6207	0.0921	4.7361	0.0103	2.3391	28.8743	6.1219	11.3042
	12 HRM	3.6239	0.0032	4.7360	0.0136	3.3319	-1.3132	6.1254	11.2528
	15 HRM	3.6239	0.0030	4.7360	0.0134	3.3291	-1.2285	6.2437	9.5388
	18 HRM	3.6239	0.0029	4.7360	0.0130	3.3143	-0.7786	6.7421	2.3183
	21 HRM	3.6239	0.0021	4.7360	0.0124	3.3143	-0.7793	6.7421	2.3178
Placa	LD4	4.2128	--	5.3926	--	3.9469	--	8.2820	--
	ED4	4.2087	0.0982	5.3916	0.0172	2.8061	28.9027	7.3439	11.3266
	12 HRM	4.2131	-0.0061	5.3925	0.0007	3.9978	-1.2916	7.3495	11.2587
	15 HRM	4.2131	-0.0064	5.3925	0.0004	3.9945	-1.2070	7.4915	9.5443
	18 HRM	4.2131	-0.0065	5.3925	0.0001	3.9767	-0.7571	8.0895	2.3239
	21 HRM	4.2131	-0.0067	5.3925	0.0000	3.9767	-0.7572	8.0895	2.3239

La Tabla 8 reporta los resultados de esfuerzos y deformaciones considerando un ratio de espesor de  $a/h = 10$  y distintos ratios entre lado y curvatura ( $R/a$ ). En todos los casos se reporta un mayor valor numérico de la deformación transversal respecto a la solución LD4. El error de la deformación tiende a incrementar como el ratio  $R/a$  decrece. El error del esfuerzo normal es menor a 0.18%, 0.14%, 0.11%, 0.09% para los modelos de 12, 15, 18 y 21 incógnitas, respectivamente considerando todos los ratios ( $R/a$ ) evaluados. El modelo ED4 presenta un máximo de 1.2%. Se puede ver una mejora notable del esfuerzo cortante transversal  $\bar{\sigma}_{\beta z}$  considerando los modelos 18 HRM y 21 HRM teniendo en cuenta un porcentaje error máximo de 3.03%. Respecto al esfuerzo  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$ , los resultados son bastante aceptables teniendo un porcentaje de error de 2.35%, 1.83%, 1.41% y 1.44% para 12, 15, 18 y 21 incógnitas.

Tabla 9 Resultados de deformaciones transversales, esfuerzo normal y esfuerzos cortantes transversales para a/h=10 bajo carga bisinusoidal.

R/a	Model	$\bar{w}$	Diff (%)	10 x $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$	Diff (%)	-100 x $\bar{\sigma}_{\alpha\beta}$	Diff (%)	100 x $\bar{\sigma}_{\alpha z}$	Diff (%)	100 x $\bar{\sigma}_{\beta z}$	Diff (%)
5	LD4	7.2718	--	5.8277	--	1.4471	--	3.4260	--	1.1883	--
	ED4	6.9738	4.0973	5.7676	1.0325	1.4117	2.4463	2.5445	25.7285	1.0016	15.7138
	12 HRM	7.3183	-0.6395	5.8174	0.1777	1.4225	1.6941	3.5065	-2.3503	1.0393	12.5402
	15 HRM	7.3210	-0.6775	5.8198	0.1365	1.4188	1.9521	3.4886	-1.8274	1.0693	10.0108
	18 HRM	7.3220	-0.6899	5.8216	0.1048	1.4191	1.9340	3.4743	-1.4108	1.1617	2.2427
	21 HRM	7.3238	-0.7148	5.8227	0.0866	1.4350	0.8327	3.4752	-1.4357	1.1613	2.2715
10	LD4	7.4733	--	5.9345	--	2.1744	--	3.5408	--	1.2249	--
	ED4	7.1375	4.4934	5.8699	1.0873	2.1109	2.9164	2.6112	26.2536	1.0275	16.1175
	12 HRM	7.5064	-0.4432	5.9329	0.0268	2.1666	0.3562	3.6060	-1.8414	1.0683	12.7831
	15 HRM	7.5093	-0.4826	5.9354	-0.0158	2.1630	0.5197	3.5876	-1.3225	1.0993	10.2549
	18 HRM	7.5103	-0.4957	5.9373	-0.0476	2.1634	0.5025	3.5729	-0.9083	1.1942	2.5042
	21 HRM	7.5108	-0.5024	5.9376	-0.0530	2.1722	0.0977	3.5732	-0.9150	1.1941	2.5116
20	LD4	7.5207	--	5.9376	--	2.5333	--	3.5677	--	1.2335	--

	ED4	7.1636	4.7479	5.8703	1.1344	2.4535	3.1495	2.6221	26.5046	1.0317	16.35506
	12 HRM	7.5382	-0.2320	5.9362	0.0242	2.5316	0.0662	3.6231	-1.5510	1.0733	12.98506
	15 HRM	7.5412	-0.2718	5.9388	-0.0188	2.5282	0.2018	3.6046	-1.0339	1.1044	10.46209
	18 HRM	7.5422	-0.2850	5.9406	-0.0506	2.5286	0.1848	3.5899	-0.6210	1.1998	2.72884
	21 HRM	7.5423	-0.2869	5.9408	-0.0538	2.5337	-0.0141	3.5899	-0.6228	1.1998	2.73106
50	LD4	7.5311	--	5.9228	--	2.7440	--	3.5736	--	1.2353	--
	ED4	7.1605	4.9202	5.8535	1.1702	2.6535	3.2991	2.6211	26.6530	1.0314	16.5104
	12 HRM	7.5360	-0.0662	5.9199	0.0487	2.7446	-0.0218	3.6222	-1.3619	1.0731	13.1346
	15 HRM	7.5390	-0.1060	5.9225	0.0057	2.7412	0.1004	3.6038	-0.8459	1.1042	10.6164
	18 HRM	7.5400	-0.1193	5.9244	-0.0262	2.7417	0.0836	3.5891	-0.4338	1.1996	2.8966
	21 HRM	7.5401	-0.1197	5.9246	-0.0296	2.7445	-0.0175	3.5891	-0.4342	1.1995	2.8974
Plate	LD4	7.5303	--	5.9059	--	2.8818	--	3.5731	--	1.2352	--
	ED4	7.1505	5.0434	5.8352	1.1974	2.7837	3.4041	2.6172	26.7512	1.0299	16.6195
	12 HRM	7.5257	0.0609	5.9014	0.0761	2.8832	-0.0490	3.6170	-1.2292	1.0716	13.2464
	15 HRM	7.5287	0.0211	5.9040	0.0331	2.8799	0.0654	3.5986	-0.7140	1.1026	10.7320
	18 HRM	7.5297	0.0079	5.9058	0.0012	2.8804	0.0487	3.5839	-0.3024	1.1978	3.0225
	21 HRM	7.5297	0.0077	5.9061	-0.0029	2.8816	0.0045	3.5839	-0.3025	1.1978	3.0229

La Figura 23 corresponde a un panel de relación de espesor ( $a/h=10$ ) en función a su ratio  $a/R$ . Se puede apreciar que un panel tipo placa posee la máxima deflexión ( $a/R=0$ ) y a medida que aumenta el ratio  $a/R$ , la deflexión decrece. Esto implica que la curvatura es un aspecto determinante para el cálculo de la deflexión.

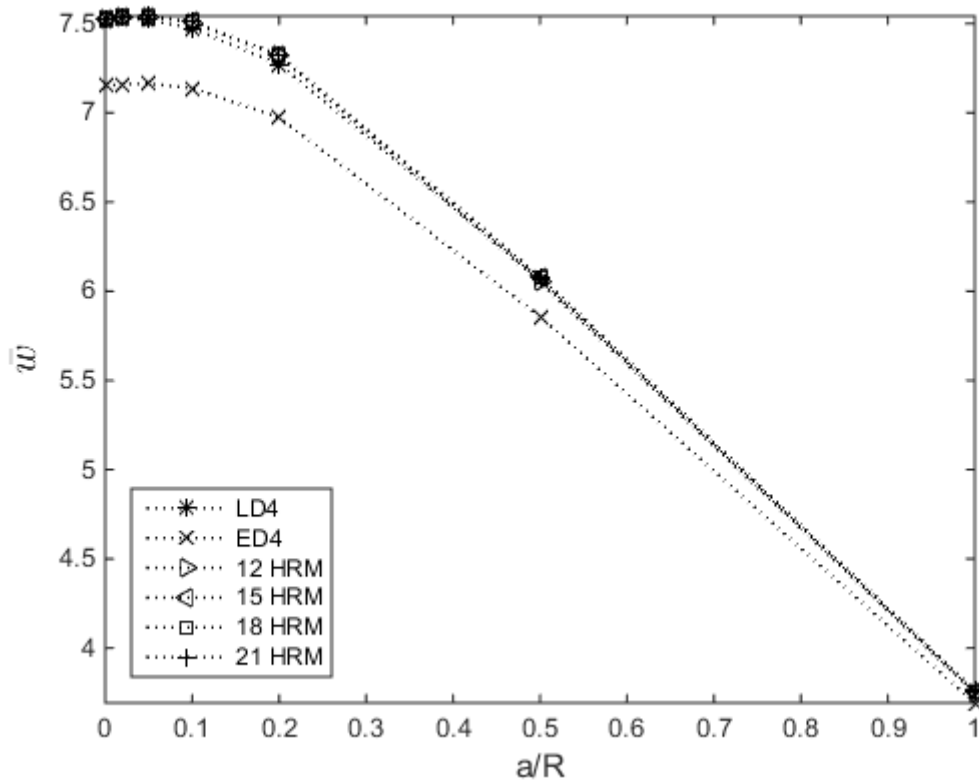


Figura 23 Relación entre el desplazamiento transversal y el ratio  $a/R$  para carga bisinusoidal.

El siguiente análisis representa un análisis gráfico respecto a la deformación transversal y algunos esfuerzos. La evaluación será en los puntos seleccionados en la tabla 5 bajo las coordenadas  $\alpha$  y  $\beta$  y se grafica a través del espesor del cascaron. Se considera útil entregar la gráfica en función al espesor normalizado ( $z/h$ ) con el fin de mantener todo en carácter adimensional.

La Figura 24 es correspondiente a la deformación transversal, tal como se puede ver la distribución propuesta por la solución ED4 se encuentra alejada de lo propuesto por una solución semi-exacta LD4. Las distribuciones propuestas por los modelos híbridos se encuentran bastante cercanas al LD4, sin embargo, poseen un mayor valor numérico.



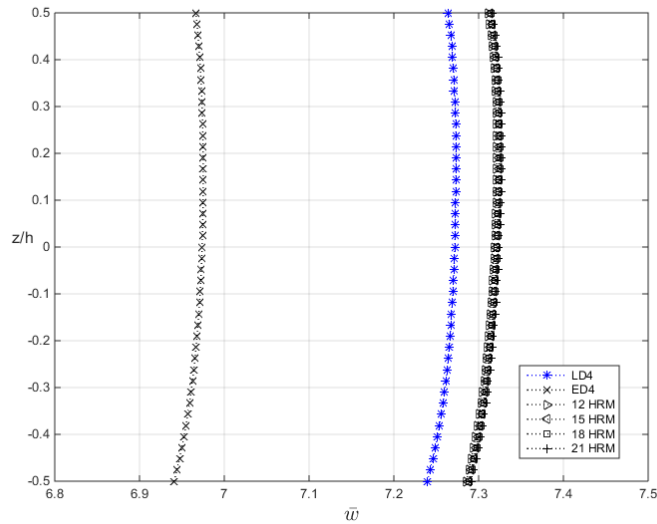


Figura 24 Distribución de la deformación transversal con respecto a carga bisinusoidal.

La distribución del esfuerzo cortante transversal  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  es presentada en la Figura 25. Tal como se puede ver, los esfuerzos de los modelos híbridos reducidos no parten propiamente en cero como es el caso del modelo LD4; sin embargo, la solución es más próxima al ED4, que no modela el efecto zigzag proporcionado por el salto drástico en cuanto al cambio de dirección de la laminación (0/90/0).

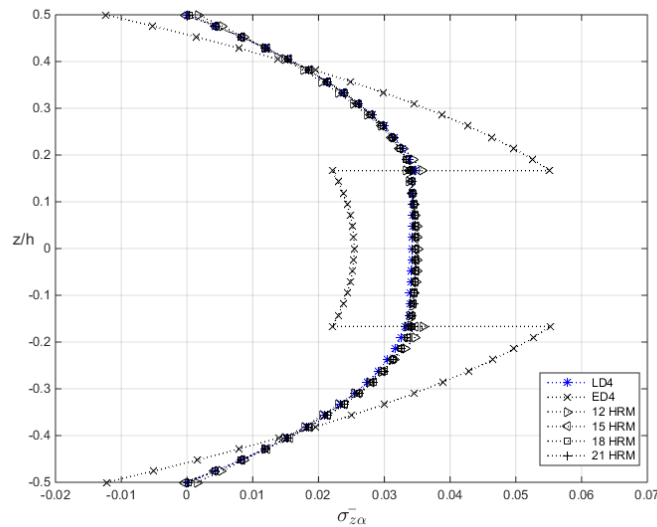


Figura 24 Distribución del esfuerzo cortante transversal  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  con respecto a carga bisinusoidal.

La Figura 26 es la representación del esfuerzo transversal  $\bar{\sigma}_{\beta z}$ . Se determina que tanto los modelos ED4, 12 HRM y 15 HRM no son capaces de proporcionar una forma de distribución adecuada, en cuanto al comportamiento de la solución propuesta LD4. La distribución con una mayor proximidad es la entregada por los modelos 18 HRM y 21 HRM; sin embargo, no llegan a terminar en cero.

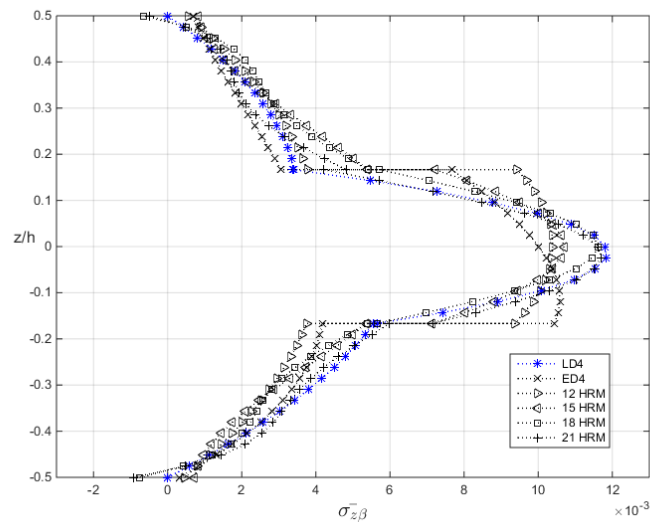


Figura 25 Distribución del esfuerzo transversal cortante  $\bar{\sigma}_{\beta z}$  respecto a carga bisinusoidal

El esfuerzo normal transversal en forma gráfica es presentado en la Figura 27. Se puede notar una diferencia notoria en cuanto a su distribución proporcionada por los modelos híbridos. En esta parte las funciones polinómicas predicen mejor el comportamiento. Se necesita de un refinamiento con teorías de equilibrio. Para más información en el procedimiento se recomienda ver el artículo del profesor Erasmo Viola et al. [42]. Dicho refinamiento se encuentra fuera del alcance de esta tesis.

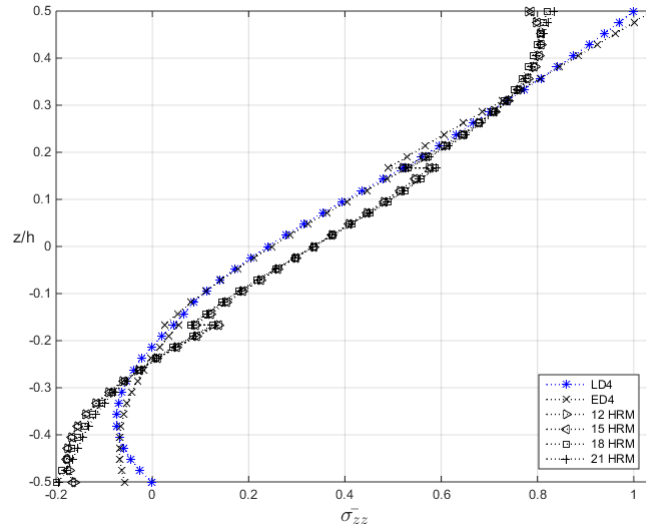


Figura 26 Distribución del esfuerzo normal transversal  $\bar{\sigma}_{zz}$  respecto a carga bisinusoidal

#### 4.1.2. Análisis de carga distribuida

El análisis para carga uniformemente distribuida es representado mediante las ecuaciones de la Tabla 4. Se considera los parámetros de la sumatoria igual a 30 ( $m=n=30$ ), se selecciona dicho número en base a la recomendación de Giunta et al. [38], quienes estimaron un parámetro mayor a 29 como lo adecuado. La Figura 28 representa una carga distribuida en toda el área de un cascarón.

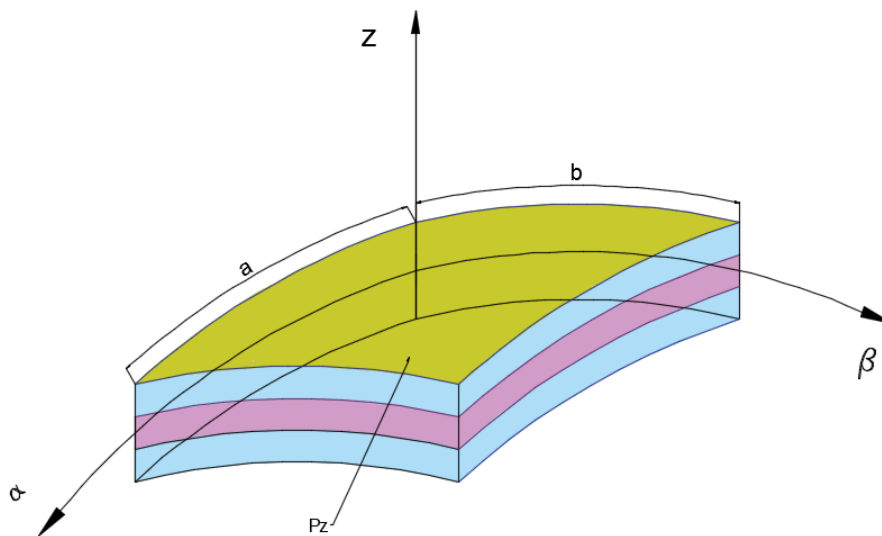


Figura 27 Cascaron sometido a carga distribuida.

Los resultados para la deformación  $\bar{w}$  y esfuerzos  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$ ,  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$ ,  $\bar{\sigma}_{\beta z}$  considerando un ratio de lado con respecto al espesor igual a 10 son presentados en la Tabla 10. En cuanto a la deformación se establece que a medida que aumenta el ratio  $R/a$ , la deformación disminuye. En cuanto, al porcentaje de error aumenta en medida que disminuye el ratio de  $R/a$  para los modelos refinados. En el caso de la solución ED4 el porcentaje de error es menor a medida que decrece la relación  $R/a$ ; sin embargo, en el porcentaje de error es mayor al proporcionado por modelos HRM. En el caso del esfuerzo normal, los porcentajes de error son bastante bajos, teniendo un máximo de 0.32% para todos los modelos propuestos; sin embargo, el modelo polinómico (ED4) cuenta con un máximo de 0.98%. Se demuestra una superioridad para el cálculo de este fuerza por parte de los modelos híbridos. En cuanto a los esfuerzos cortantes se establece una mejora notable en cuanto al porcentaje de error, por ejemplo, para el esfuerzo  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  cuando el panel es considerado como placa para una solución de tipo ED4 se cuenta con un porcentaje de error de aproximadamente 25.5%; sin embargo, los modelos híbridos cuentan con aproximadamente 0.9%, 0.22%, 0.03% y 0.04% para los modelos de 12, 15, 18 y 21 variables. Para el esfuerzo  $\bar{\sigma}_{\beta z}$ , se afirma que al aumentar la relación  $R/a$  aumenta el porcentaje de error.

Tabla 10 Resultados de deformaciones transversales, esfuerzo normal y esfuerzos cortantes transversales para a/h=10 bajo carga uniformemente distribuido.

R/a	Modelo	$\bar{w}$	Diff (%)	10 x $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$	Diff (%)	100 x $\bar{\sigma}_{\alpha z}$	Diff (%)	100 x $\bar{\sigma}_{\beta z}$	Diff (%)
5	LD4	11.1130	--	8.5126	--	6.0448	--	3.9271	--
	ED4	10.6607	4.0700	8.4450	0.7951	4.5701	24.3959	3.3570	14.5177
	12 HRM	11.2026	-0.8069	8.5236	-0.1282	6.1682	-2.0423	3.4213	12.8810
	15 HRM	11.2039	-0.8182	8.5249	-0.1440	6.1261	-1.3451	3.5771	8.9123
	18 HRM	11.2029	-0.8093	8.5260	-0.1572	6.1108	-1.0914	3.8904	0.9338
	21 HRM	11.2058	-0.8351	8.5281	-0.1811	6.1119	-1.1105	3.8894	0.9613
10	LD4	11.4333	--	8.7032	--	6.2286	--	3.9999	--
	ED4	10.9248	4.4470	8.6291	0.8520	4.6734	24.9690	3.3987	15.0315
	12 HRM	11.5063	-0.6389	8.7288	-0.2934	6.3241	-1.5330	3.4682	13.2945
	15 HRM	11.5078	-0.6521	8.7303	-0.3111	6.2813	-0.8458	3.6259	9.3517
	18 HRM	11.5069	-0.6440	8.7315	-0.3252	6.2652	-0.5875	3.9437	1.4051
	21 HRM	11.5077	-0.6510	8.7324	-0.3351	6.2653	-0.5884	3.9430	1.4225
20	LD4	11.5090	--	8.7199	--	6.2719	--	4.0162	--
	ED4	10.9684	4.6973	8.6409	0.9057	4.6889	25.2384	3.4016	15.3038
	12 HRM	11.5589	-0.4340	8.7455	-0.2929	6.3494	-1.2368	3.4722	13.5452
	15 HRM	11.5605	-0.4476	8.7470	-0.3111	6.3066	-0.5532	3.6300	9.6158
	18 HRM	11.5596	-0.4398	8.7483	-0.3256	6.2903	-0.2943	3.9483	1.6908
	21 HRM	11.5598	-0.4419	8.7490	-0.3331	6.2901	-0.2903	3.9477	1.7057
50	LD4	11.5257	--	8.7037	--	6.2812	--	4.0192	--
	ED4	10.9645	4.8689	8.6212	0.9476	4.6861	25.3961	3.3973	15.4730
	12 HRM	11.5567	-0.2693	8.7266	-0.2629	6.3467	-1.0426	3.4681	13.7114
	15 HRM	11.5583	-0.2831	8.7282	-0.2814	6.3039	-0.3607	3.6257	9.7902
	18 HRM	11.5574	-0.2753	8.7295	-0.2962	6.2876	-0.1020	3.9436	1.8802
	21 HRM	11.5575	-0.2759	8.7301	-0.3037	6.2873	-0.0965	3.9431	1.8943
Placa	LD4	11.5247	--	8.6818	--	6.2805	--	4.0183	--
	ED4	10.9493	4.9924	8.5968	0.9793	4.6790	25.4997	3.3919	15.5884
	12 HRM	11.5410	-0.1418	8.7018	-0.2304	6.3374	-0.9058	3.4626	13.8290
	15 HRM	11.5426	-0.1556	8.7035	-0.2489	6.2946	-0.2250	3.6200	9.9134
	18 HRM	11.5417	-0.1479	8.7048	-0.2640	6.2784	0.0334	3.9374	2.0142
	21 HRM	11.5418	-0.1482	8.7055	-0.2722	6.2780	0.0392	3.9368	2.0280

Los resultados de deformaciones en función al ratio  $a/R$  son comparados en la Figura 29. Se puede notar un mayor valor numérico de los modelos híbridos refinados con respecto al modelo LD4. Adicionalmente se incluyen resultados del profesores Reddy y Liu [13] y de un paper presentado por mi asesor [26]. Se puede observar que la teoría de orden superior de mi asesor presenta mejores resultados con respecto al modelo ED4 para una relación  $a/R$  menor a 1.2.

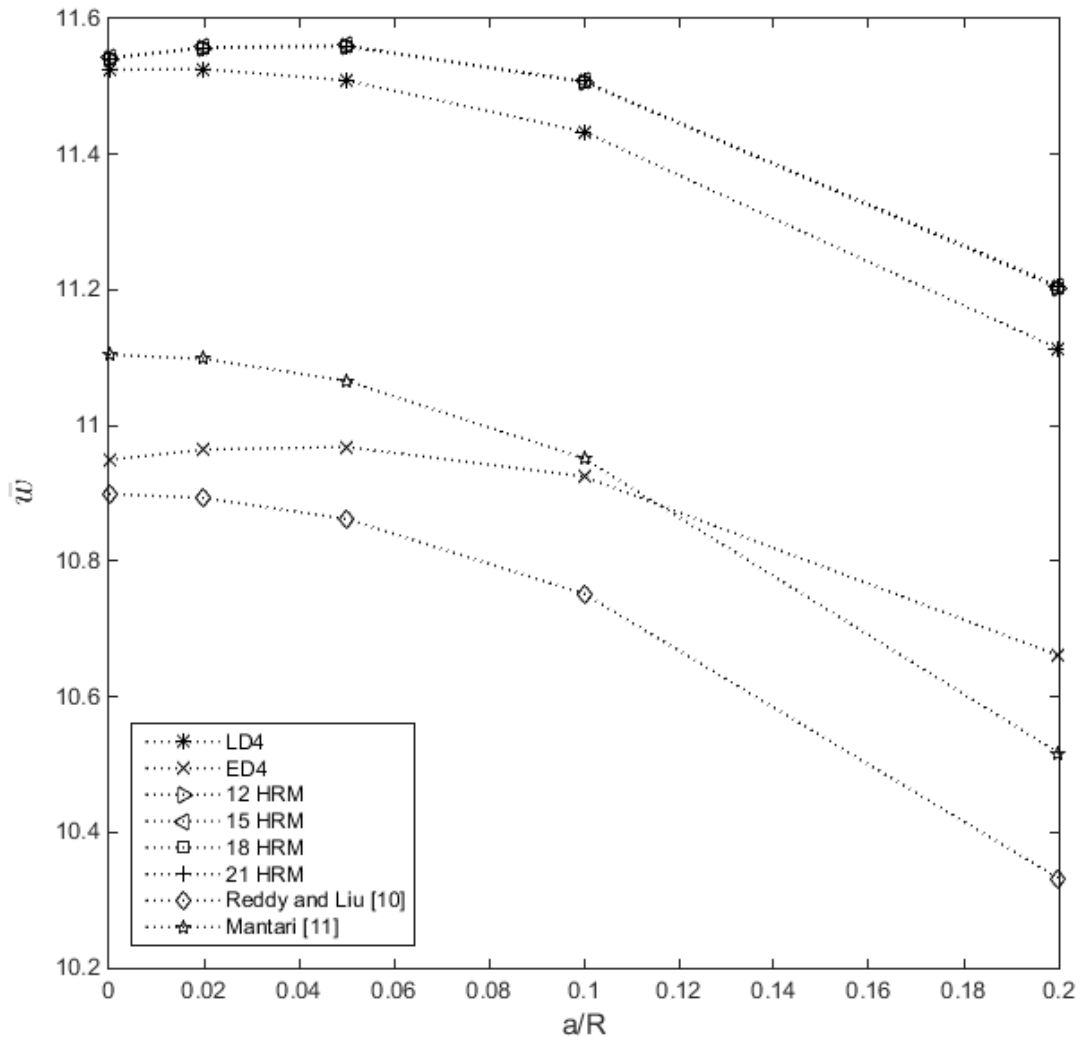


Figura 28 Relación entre el desplazamiento transversal y el ratio  $a/R$  para carga distribuida uniformemente.

Las distribuciones de esfuerzos serán presentadas considerando  $R/a=5$ . La primera grafica es la representación del esfuerzo  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$ , se puede denotar que los modelos refinados siguen perfectamente la tendencia del modelo LD4. El modelo ED4 presenta cierta discrepancia en la interfaz de laminación.

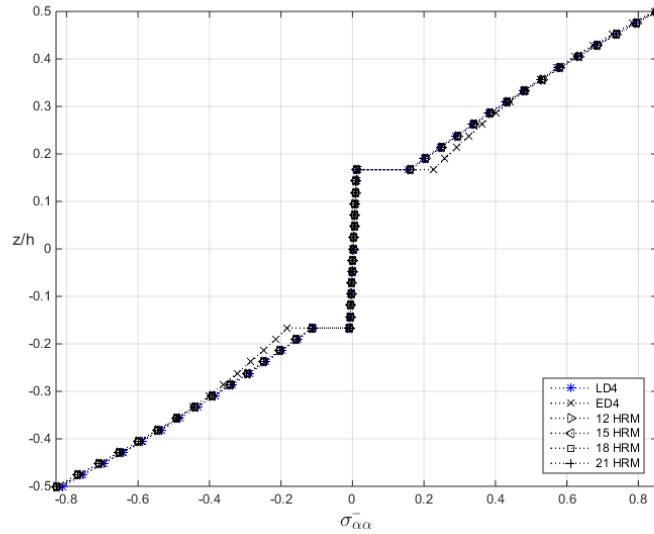


Figura 29 Distribución del esfuerzo normal  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$  con respecto a carga uniformemente distribuida

La representación del esfuerzo  $\bar{\sigma}_{\alpha\beta}$  es presentada en la Figura 31. Para los modelos híbridos es bastante buena en la segunda capa ( $90^\circ$ ); sin embargo, para las capas restantes de ángulo  $0^\circ$  existe cierta discrepancia respecto a la solución LD4.

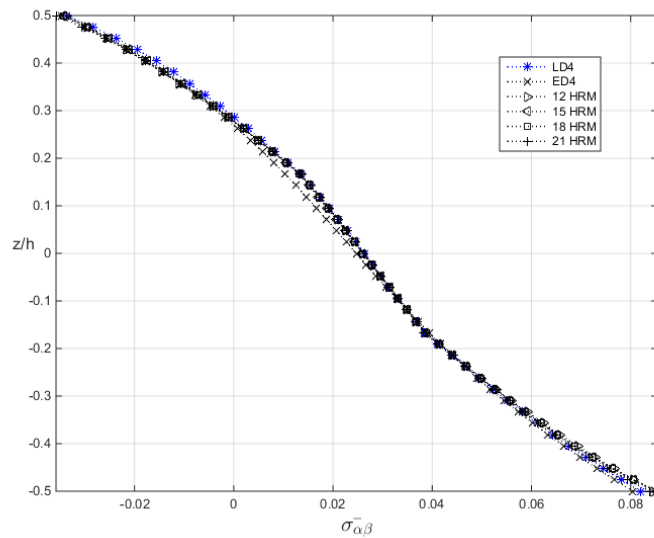


Figura 30 Distribución del esfuerzo cortante en el plano  $\bar{\sigma}_{\alpha\beta}$  con respecto a carga uniformemente distribuida.

El esfuerzo cortante  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  se presenta en la Figura 32. Se demuestra que los modelos refinados de 18 y 21 variables pueden seguir la tendencia del modelo LD4.

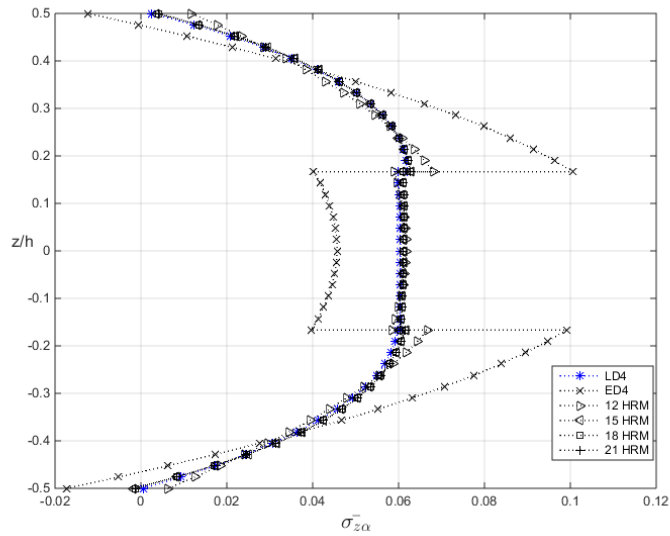


Figura 31 Distribución del esfuerzo cortante trasversal  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  con respecto a carga uniformemente distribuida.

El esfuerzo  $\bar{\sigma}_{\beta z}$  se ilustra en la Figura 33. Se afirma que la tendencia del LD4 es representada correctamente en la capa  $90^\circ$  por modelos de 18 y 21 variables. En cuanto a los modelos de 12 y 15 variables y ED4 demuestran cierta discontinuidad en el cambio abrupto de la laminación entre capas.

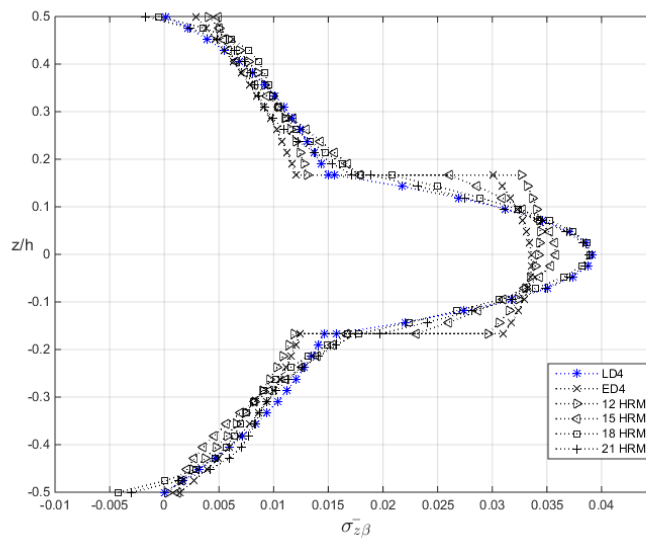


Figura 32 Distribución del esfuerzo cortante trasversal  $\bar{\sigma}_{\beta z}$  con respecto a carga uniformemente distribuida.



#### 4.1.3 Analisis de carga distribuida localizada

Se analizara un panel de relacion ( $a/h=10$ ) entorno a una carga distribuida entorno a una area determinada. La area seleccionada es la siguiente:  $\frac{a}{4} \leq \alpha \leq \frac{3a}{4}, \frac{b}{4} \leq \beta \leq \frac{3b}{4}$ . La representaci3n gr1fica de la carga es la siguiente:

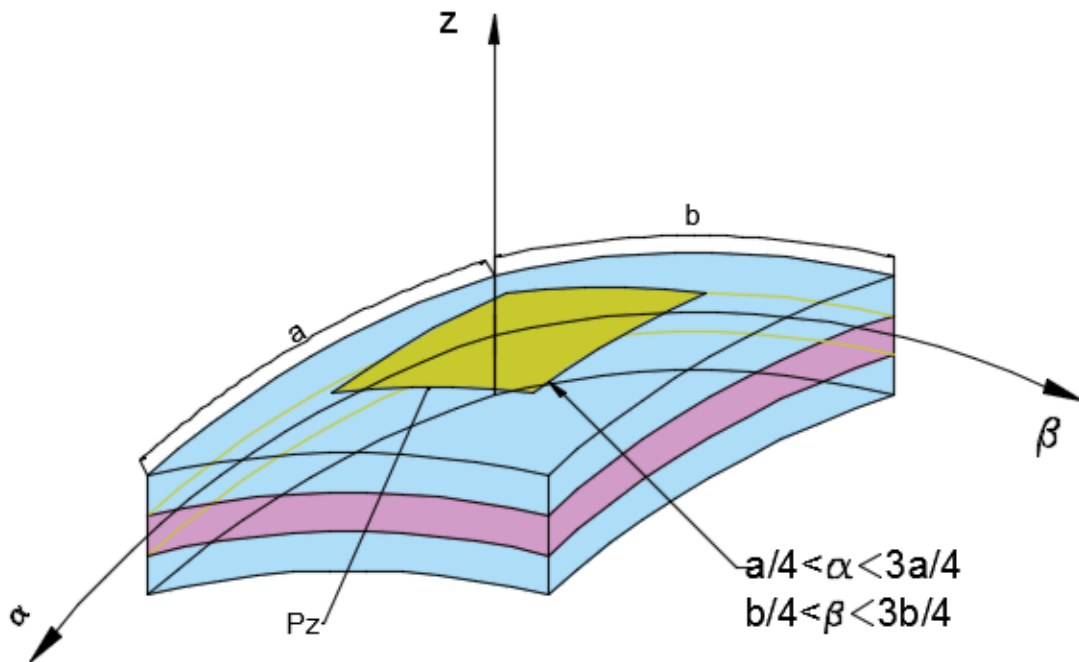


Figura 33 Cascar3n sometido a carga distribuida localizada.

En torno al an1lisis de los par1metros de Fourier se realiza en torno a un an1lisis de convergencia para la soluci3n ED4 entorno a la deformaci3n  $\bar{w}$  para un ratio  $R/a=5$ . En la Figura 35 se establece un an1lisis en cuanto a la cantidad de t1rminos trigonom3tricos para la ecuaci3n (2.3.4.11-13) y se establece 30 como un par1metro adecuado para el c1lculo de esfuerzos y deformaciones.

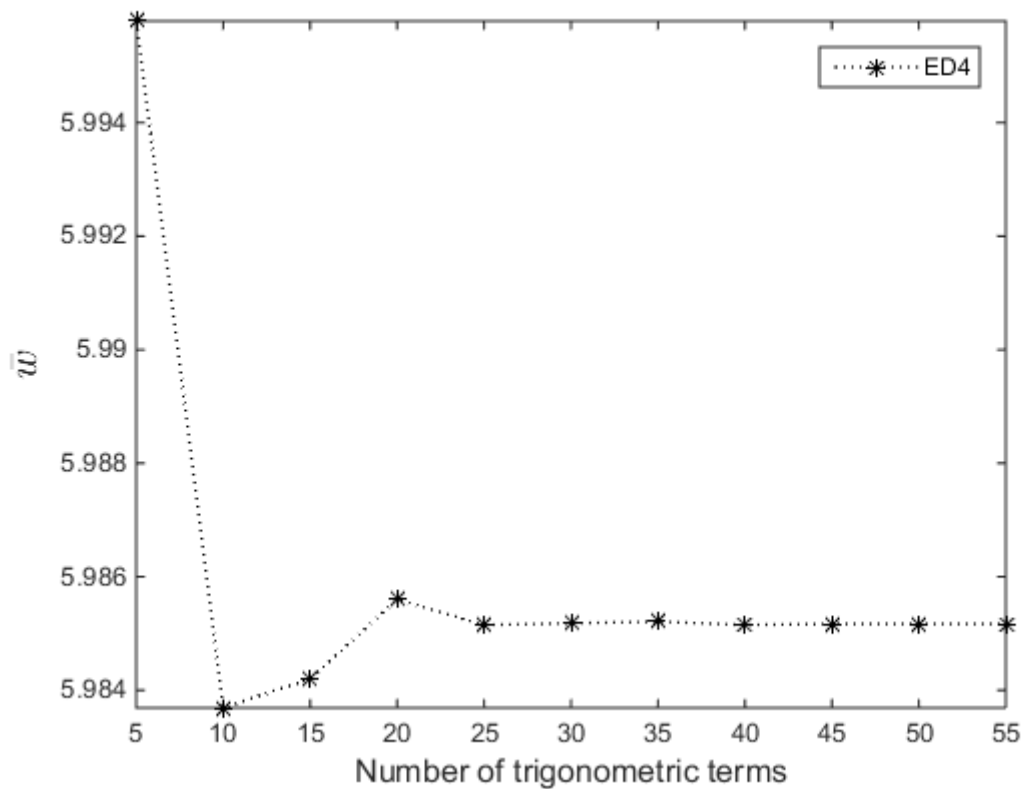


Figura 34 Convergencia de la deformación transversal para  $R/a=5$  y  $a/h=10$  considerando carga distribuida localizada.

Los resultados de las deformaciones y esfuerzos se presentan en la Tabla 11. La deformación transversal  $\bar{w}$  de los modelos híbridos refinados presentan un mayor valor numérico respecto a la solución LD4. El error porcentual de la deformación disminuye al aumentar la relación  $R/a$ . Los modelos presentan un máximo error para  $R/a=5$  teniendo una diferencia máxima de 0.84%, 0.89%, 0.93%, 0.95% para los modelos de 12, 15, 18 y 21 variables, respectivamente. El esfuerzo  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$  presenta mayores valores numéricos respecto a la solución LD4. En cuanto, al cortante  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  se establece porcentajes de error máximos de 2.67%, 2.41%, 2.02% y 2.05% para los modelos de 12, 15, 18 y 21 incógnitas. El esfuerzo  $\bar{\sigma}_{\beta z}$  presenta gran discrepancia al porcentaje de error por lo que se debería tomar en cuenta una refinación por equilibrio.

Tabla 11 Resultados de deformaciones transversales, esfuerzo normal y esfuerzos cortantes transversales para a/h=10 bajo carga distribuida localizada.

R/a	Model	$\bar{w}$	Diff (%)	$\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$	Diff (%)	100 x $\bar{\sigma}_{\alpha z}$	Diff (%)	100 x $\bar{\sigma}_{\beta z}$	Diff (%)
5	LD4	6.2222	--	5.1560	--	2.5093	--	1.7348	--
	ED4	5.9852	3.8084	5.1322	0.4622	1.8364	26.8145	1.5674	9.6511
	12 HRM	6.2743	-0.8375	5.1783	-0.4321	2.5763	-2.6692	1.8099	-4.3285
	15 HRM	6.2778	-0.8950	5.1773	-0.4130	2.5698	-2.4135	1.5401	11.2276
	18 HRM	6.2797	-0.9247	5.1801	-0.4677	2.5599	-2.0162	1.5681	9.6111
	21 HRM	6.2812	-0.9490	5.1810	-0.4841	2.5605	-2.0417	1.5655	9.7585
10	LD4	6.3874	--	5.2382	--	2.6035	--	1.9694	--
	ED4	6.1183	4.2130	5.2081	0.5752	1.8929	27.2949	1.7666	10.2988
	12 HRM	6.4273	-0.6248	5.2649	-0.5100	2.6597	-2.1609	2.0337	-3.2630
	15 HRM	6.4310	-0.6835	5.2641	-0.4933	2.6529	-1.8982	1.7697	10.1384
	18 HRM	6.4329	-0.7137	5.2669	-0.5475	2.6426	-1.5033	1.8174	7.7194
	21 HRM	6.4334	-0.7203	5.2671	-0.5520	2.6428	-1.5108	1.8170	7.7367
20	LD4	6.4262	--	5.2377	--	2.6258	--	2.0279	--
	ED4	6.1389	4.4710	5.2037	0.6498	1.9028	27.5349	1.8134	10.5776
	12 HRM	6.4524	-0.4081	5.2630	-0.4818	2.6749	-1.8678	2.0864	-2.8860
	15 HRM	6.4562	-0.4671	5.2621	-0.4654	2.6680	-1.6040	1.8245	10.0274
	18 HRM	6.4581	-0.4974	5.2649	-0.5193	2.6576	-1.2103	1.8771	7.4375
	21 HRM	6.4583	-0.4992	5.2651	-0.5220	2.6577	-1.2131	1.8773	7.4273
50	LD4	6.4346	--	5.2236	--	2.6309	--	2.0427	--
	ED4	6.1357	4.6451	5.1869	0.7018	1.9026	27.6805	1.8233	10.7392
	12 HRM	6.4500	-0.2400	5.2466	-0.4407	2.6750	-1.6759	2.0976	-2.6895
	15 HRM	6.4538	-0.2989	5.2457	-0.4240	2.6680	-1.4120	1.8367	10.0862
	18 HRM	6.4558	-0.3292	5.2486	-0.4779	2.6577	-1.0191	1.8904	7.4553
	21 HRM	6.4558	-0.3297	5.2487	-0.4808	2.6577	-1.0206	1.8908	7.4380
100	LD4	6.4349	--	5.2166	--	2.6311	--	2.0442	--
	ED4	6.1320	4.7065	5.1790	0.7203	1.9015	27.7294	1.8236	10.7923
	12 HRM	6.4463	-0.1774	5.2386	-0.4229	2.6734	-1.6091	2.0979	-2.6283
	15 HRM	6.4501	-0.2363	5.2377	-0.4061	2.6665	-1.3452	1.8372	10.1262
	18 HRM	6.4520	-0.2666	5.2406	-0.4599	2.6562	-0.9527	1.8911	7.4914
	21 HRM	6.4521	-0.2669	5.2407	-0.4632	2.6562	-0.9540	1.8914	7.4732
Plate	LD4	6.4339	--	5.2084	--	2.6307	--	2.0440	--
	ED4	6.1271	4.7695	5.1699	0.7395	1.8999	27.7784	1.8223	10.8451
	12 HRM	6.4411	-0.1117	5.2466	-0.7341	2.6712	-1.5408	2.0965	-2.5692
	15 HRM	6.4449	-0.1705	5.2285	-0.3860	2.6643	-1.2771	1.8360	10.1763
	18 HRM	6.4468	-0.2008	5.2313	-0.4398	2.6539	-0.8849	1.8898	7.5425
	21 HRM	6.4469	-0.2010	5.2315	-0.4435	2.6540	-0.8861	1.8902	7.5240

La Figura 36 como varía la deformación  $\bar{w}$  en función al ratio a/R. Se aprecia claramente que los modelos refinados poseen una mayor deflexión respecto a la solución LD4.

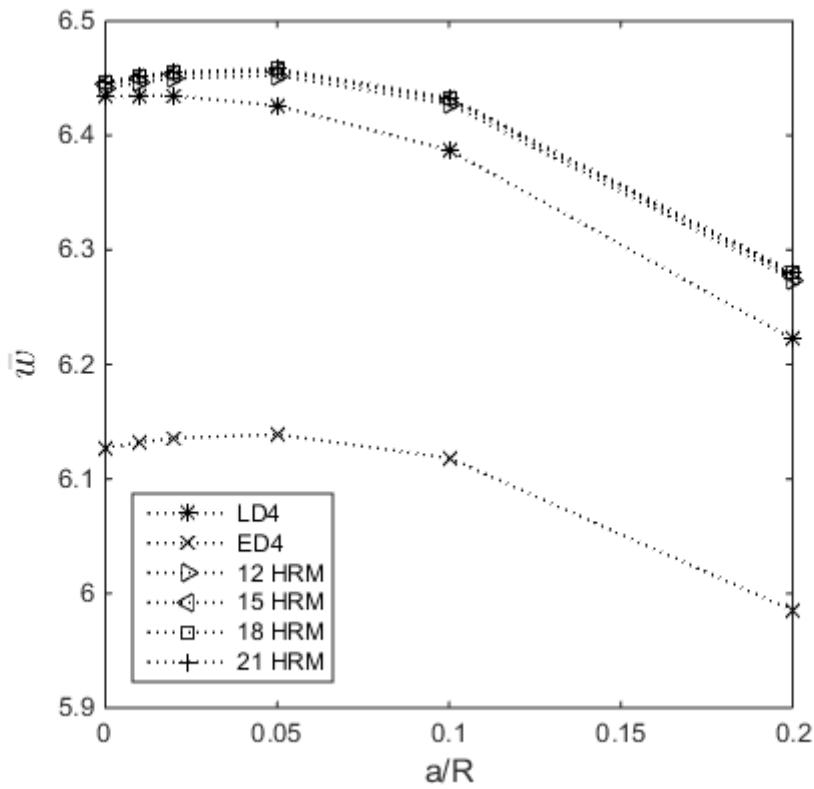


Figura 35 Relación entre el desplazamiento transversal y el ratio  $a/R$  para carga distribuida localizada.

Las distribuciones serán presentadas considerando una relación  $R/a=5$ . La deformación  $\bar{w}$  es presentada en la Figura 37 y presenta la misma tendencia para todos los modelos refinados; sin embargo, presentan un valor numérico más alto respecto a la solución LD4.

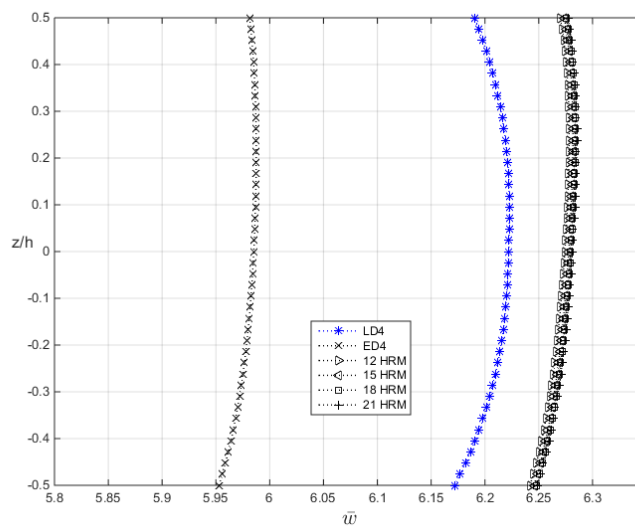


Figura 36 Distribución de la deformación transversal con respecto a carga distribuida localizada.

Los modelos refinados permiten una correcta distribución del esfuerzo normal  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$  respecto al modelo LD4, como se aprecia en la Figura 38. El modelo ED4 falla en torno al cambio de laminación abrupto (0/90 y 90/0).

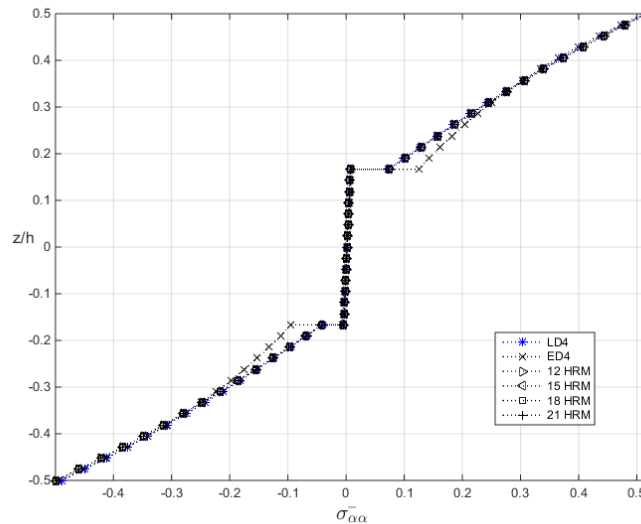


Figura 37 Distribución del esfuerzo normal  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$  con respecto a carga distribuida localizada.

La distribución del esfuerzo cortante transversal  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  resuelta mediante los modelos refinados presenta similitud respecto a la solución LD4. Se establece también, tanto la parte superior de la última capa, como la inferior de la primera capa poseen un valor de cero. A continuación, se demuestra la distribución:

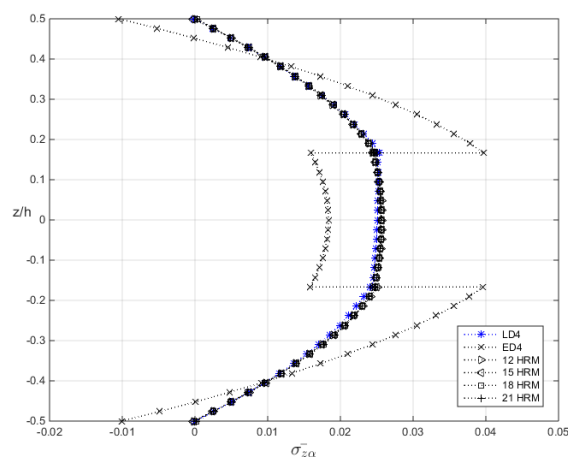


Figura 38 Distribución del esfuerzo cortante transversal  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  con respecto a carga distribuida localizada.

La Figura 40 corresponde al esfuerzo transversal normal, en este esfuerzo se determina el modelo que representa mejor la distribución es proporcionado por el modelo ED4. En esta parte, se recomendaría un post-proceso de refinamiento para la gráfica mediante ecuaciones de equilibrio.

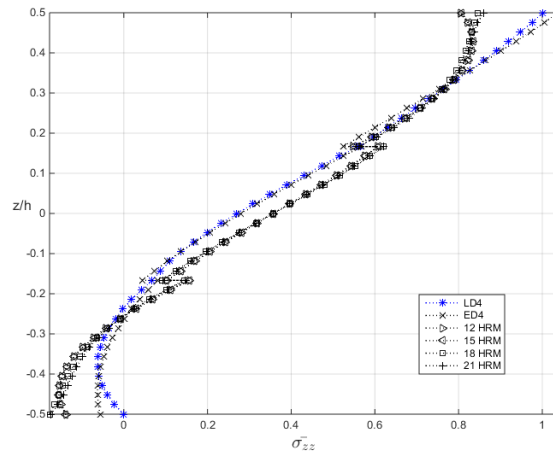


Figura 39 Distribución del esfuerzo transversal normal  $\bar{\sigma}_{zz}$  con respecto a carga distribuida localizada.

#### 4.1.4 Análisis mediante carga hidrostática transversal

Se somete el panel presentado tomando en cuenta  $a/h=10$  a una carga hidrostática transversal representado en la figura siguiente:

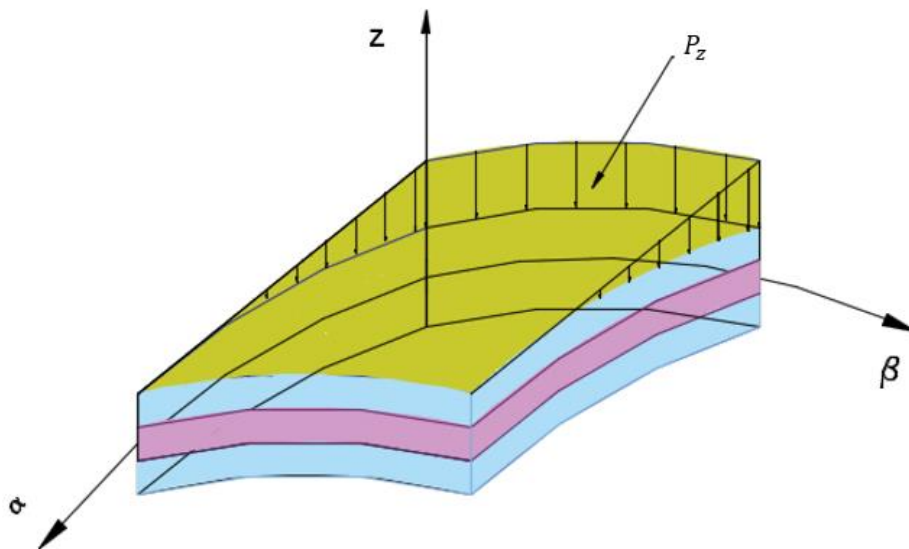


Figura 40 Cascarón sometido a carga hidrostática transversal.

Los parámetros de Fourier (ver ecuación 3.31 y Tabla 4) son representados en función a una gráfica de convergencia en torno a la solución ED4. En base a Figura 42 se estima que  $m=n=30$  serian parametros adecuados para el posterior calculo de las distribuciones de deformaciones y esfuerzos.

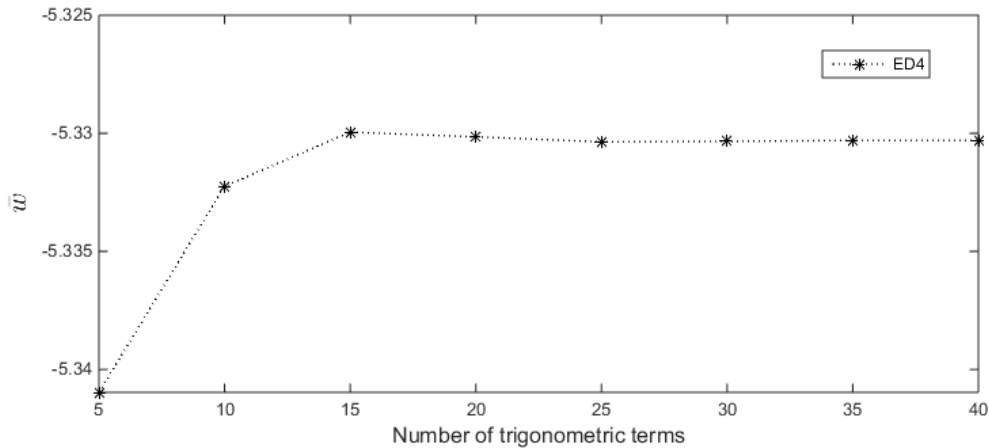


Figura 41 Convergencia de la deformación  $\bar{w}$  para  $R/a=5$  y  $a/h=10$  considerando carga hidrostática transversal.

La Tabla 12 representa los resultados para la deformación transversal  $\bar{w}$  y esfuerzos  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$ ,  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$ ,  $\bar{\sigma}_{\beta z}$ . En torno, a la deformación transversal se puede notar que al disminuir la relación  $R/a$ , se aumenta el porcentaje de error para los modelos híbridos refinados. En torno al esfuerzo  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$  se establece un máximo de 0.3%, 0.32%, 0.33% y 0.33% para los modelos híbridos de 12, 15, 18 y 21 variables, respectivamente. El esfuerzo  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  presenta un máximo error para  $R/a=5$  teniendo 2.04%, 1.35%, 1.1% y 1.11% para los modelos de 12, 15, 18 y 21 incógnitas. El modelo ED4 presenta un error de 24.4% aproximadamente, para el mismo caso. El porcentaje de error disminuye al aumentar la relación  $R/a$ . El esfuerzo  $\bar{\sigma}_{\beta z}$  presenta mayores porcentajes de error cuando el panel es considerado como placa ( $R/a=\infty$ ). El porcentaje de error aumenta al aumentar la relación  $R/a$ . Los modelos propuestos presentan un menor porcentaje de error para ese esfuerzo; sin embargo, los mejores resultados se presentan para los modelos de 18 y 21 variables.

Tabla 12 Resultados de deformaciones transversales, esfuerzo normal y esfuerzos cortantes transversales para a/h=10 bajo carga hidrostática transversal.

R/a	Model	$\bar{w}$	Diff (%)	$\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$	Diff (%)	$\bar{\sigma}_{\alpha z}$	Diff (%)	$\bar{\sigma}_{\beta z}$	Diff (%)
5	LD4	-5.5565	--	-4.2563	--	-3.0224	--	-1.9564	--
	ED4	-5.3303	4.0700	-4.2225	0.7950	-2.2851	24.3957	-1.6785	14.2071
	12 HRM	-5.6013	-0.8069	-4.2618	-0.1282	-3.0841	-2.0423	-1.7106	12.5644
	15 HRM	-5.6019	-0.8182	-4.2624	-0.1440	-3.0631	-1.3451	-1.7886	8.5813
	18 HRM	-5.6015	-0.8093	-4.2630	-0.1572	-3.0554	-1.0914	-1.9452	0.5738
	21 HRM	-5.6029	-0.8351	-4.2640	-0.1811	-3.0560	-1.1105	-1.9447	0.6014
10	LD4	-5.7166	--	-4.3516	--	-3.1143	--	-1.9929	--
	ED4	-5.4624	4.4470	-4.3145	0.8520	-2.3367	24.9690	-1.6993	14.7292
	12 HRM	-5.7532	-0.6389	-4.3644	-0.2934	-3.1621	-1.5330	-1.7341	12.9860
	15 HRM	-5.7539	-0.6521	-4.3651	-0.3111	-3.1407	-0.8458	-1.8129	9.0292
	18 HRM	-5.7534	-0.6440	-4.3658	-0.3252	-3.1326	-0.5875	-1.9719	1.0543
	21 HRM	-5.7538	-0.6510	-4.3662	-0.3351	-3.1326	-0.5884	-1.9715	1.0718
20	LD4	-5.7545	--	-4.3600	--	-3.1359	--	-2.0010	--
	ED4	-5.4842	4.6973	-4.3205	0.9057	-2.3445	25.2384	-1.7008	15.0041
	12 HRM	-5.7795	-0.4340	-4.3727	-0.2929	-3.1747	-1.2368	-1.7361	13.2392
	15 HRM	-5.7802	-0.4476	-4.3735	-0.3111	-3.1533	-0.5532	-1.8150	9.2960
	18 HRM	-5.7798	-0.4398	-4.3742	-0.3256	-3.1452	-0.2943	-1.9742	1.3430
	21 HRM	-5.7799	-0.4419	-4.3745	-0.3331	-3.1450	-0.2903	-1.9739	1.3579
50	LD4	-5.7628	--	-4.3518	--	-3.1406	--	-2.0025	--
	ED4	-5.4823	4.8689	-4.3106	0.9474	-2.3430	25.3961	-1.6987	15.1744
	12 HRM	-5.7784	-0.2693	-4.3633	-0.2629	-3.1734	-1.0426	-1.7341	13.4066
	15 HRM	-5.7792	-0.2831	-4.3641	-0.2814	-3.1519	-0.3607	-1.8129	9.4715
	18 HRM	-5.7787	-0.2753	-4.3647	-0.2962	-3.1438	-0.1020	-1.9718	1.5336
	21 HRM	-5.7787	-0.2759	-4.3651	-0.3037	-3.1437	-0.0965	-1.9715	1.5477
100	LD4	-5.7632	--	-4.3469	--	-3.1408	--	-2.0025	--
	ED4	-5.4791	4.9297	-4.3051	0.9629	-2.3415	25.4480	-1.6974	15.2321
	12 HRM	-5.7751	-0.2073	-4.3577	-0.2479	-3.1714	-0.9749	-1.7328	13.4650
	15 HRM	-5.7759	-0.2211	-4.3585	-0.2664	-3.1500	-0.2936	-1.8116	9.5327
	18 HRM	-5.7755	-0.2134	-4.3592	-0.2814	-3.1419	-0.0350	-1.9704	1.6001
	21 HRM	-5.7755	-0.2138	-4.3595	-0.2891	-3.1417	-0.0293	-1.9701	1.6141
Plate	LD4	-5.7623	--	-4.3409	--	-3.1402	--	-2.0021	--
	ED4	-5.4747	4.9923	-4.2984	0.9793	-2.3395	25.4997	-1.6960	15.2903
	12 HRM	-5.7705	-0.1418	-4.3509	-0.2304	-3.1687	-0.9058	-1.7313	13.5247
	15 HRM	-5.7713	-0.1556	-4.3517	-0.2489	-3.1473	-0.2250	-1.8100	9.5952
	18 HRM	-5.7709	-0.1479	-4.3524	-0.2640	-3.1392	0.0334	-1.9687	1.6682
	21 HRM	-5.7709	-0.1482	-4.3527	-0.2722	-3.1390	0.0392	-1.9684	1.6820



La deformación  $\bar{w}$  es presentada en función a la relación  $a/R$  es presentada en la Figura 43. Se puede apreciar, a medida que la relación  $a/R$  disminuye, la deformación aumenta. Se puede notar claramente, el porcentaje de error es mayor en el modelo ED4.

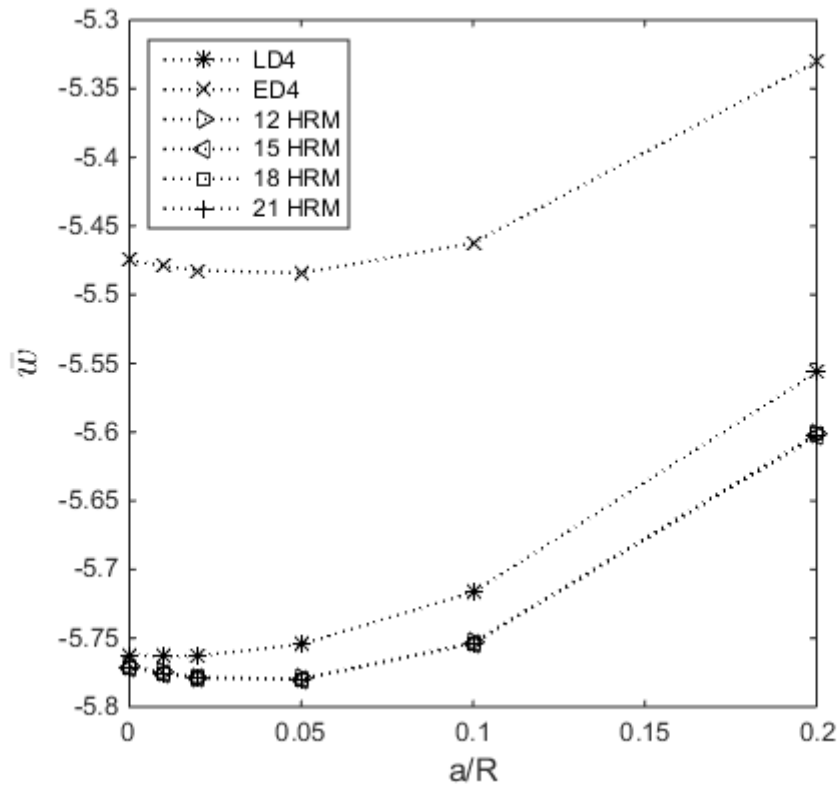


Figura 42 Relación entre el desplazamiento transversal y el ratio  $a/R$  para carga hidrostática transversal.

La distribución de la deformación es presentada en Figura 44. Se puede notar que todos los modelos híbridos presentan la misma tendencia en cuanto a su deformación; sin embargo, su valor numérico es mayor al presentado por el modelo LD4. Los valores numéricos son menores a los presentados por el LD4 y los modelos ED4.

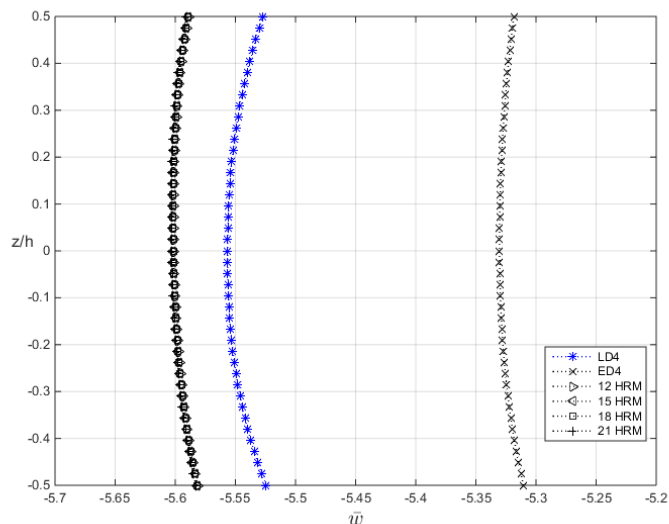


Figura 43 Distribución de la deformación transversal con respecto a carga hidrostática transversal.

La distribución del esfuerzo normal  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$  se presenta en la figura siguiente. Se muestra cierto desfase entre la solución LD4 y ED4; debido a que, la solución LD4 presenta una interfaz en su matriz de ensamble. Los modelos refinados permiten obtener una aproximación bastante buena de toda la distribución en sí.

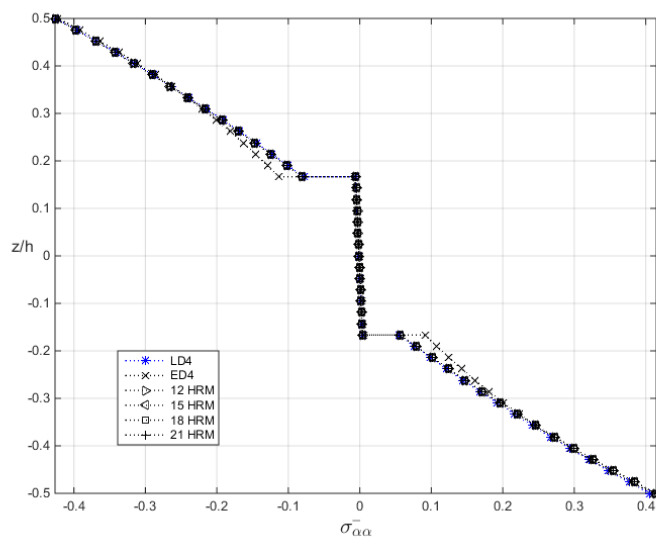


Figura 44 Distribución del esfuerzo normal  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$  con respecto a carga hidrostática transversal.

El esfuerzo cortante en el plano  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  es representado en la Figura 46. Se puede notar que los modelos híbridos predicen correctamente el comportamiento propuesto por la solución LD4.

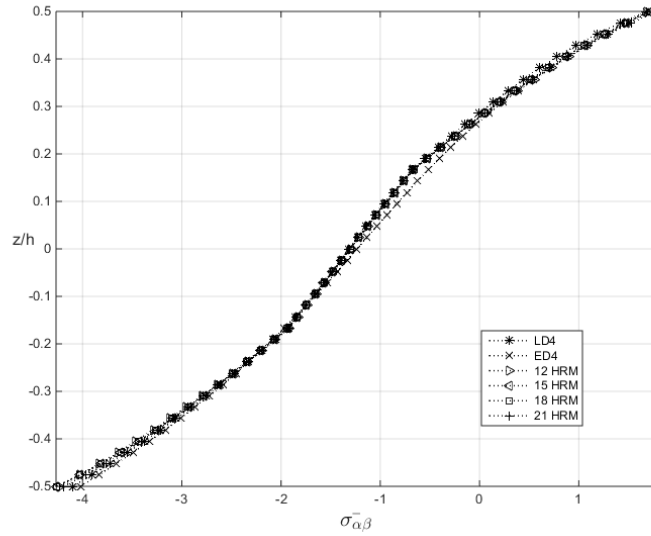


Figura 45 Distribución del esfuerzo cortante en el plano  $\bar{\sigma}_{\alpha\beta}$  con respecto a carga hidrostática transversal.

El esfuerzo cortante  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  es representado en la Figura 47. Se establece que los modelos de 18 y 21 variables son capaces de predecir el comportamiento del modelo LD4. El modelo 15 HRM y 12 HRM no predicen el cambio de laminación. Se puede afirmar que para este caso es decisivo la cantidad de variables a tomar en cuenta.

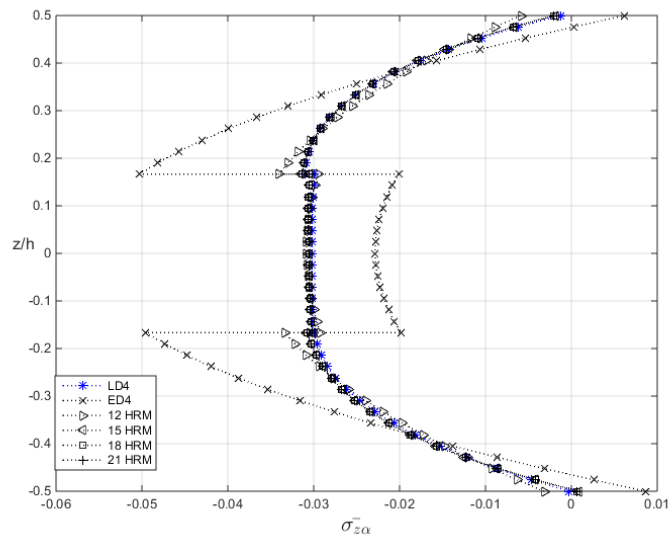


Figura 46 Distribución del esfuerzo cortante transversal  $\bar{\sigma}_{\alpha z}$  con respecto a carga hidrostática transversal.

El esfuerzo cortante transversal  $\bar{\sigma}_{\beta z}$  se presenta en la Figura 48. Se aprecia que los modelos de 18 y 21 variables son capaces de representar la solución propuesta por el LD4. Se recomendaría una refinación por equilibrio para el caso de los modelos de 12 y 15 incógnitas con el fin de llegar a cero en la parte superior de la última lámina e inferior de la primera capa.

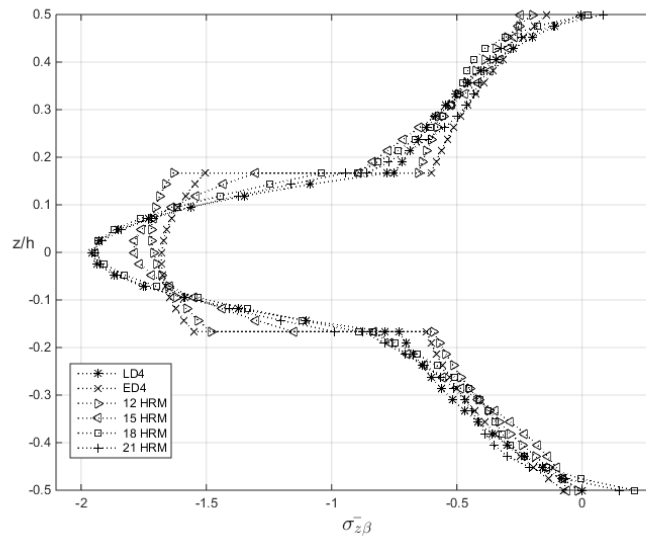


Figura 47 Distribución del esfuerzo cortante transversal  $\bar{\sigma}_{\beta z}$  con respecto a carga hidrostática transversal.

#### 4.1.5 Análisis con carga puntual

Un cascarón de un ratio de espesor igual a 10 ( $a/h=10$ ) es sometido a un carga puntual en el medio del cascarón. Se representa en la figura siguiente:

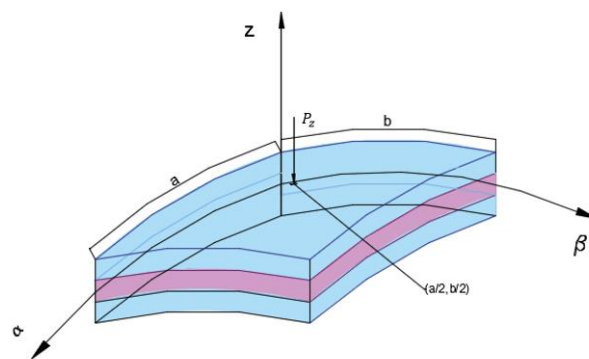


Figura 48 Cascaron bajo carga puntual

Los parámetros de la serie de Fourier son considerados iguales a 101 ( $m=n=101$ ), tomando en cuenta los trabajos previos de los profesores Reddy y Liu [13]. Se presentará el cálculo de las deformaciones transversales normalizadas. En la primera tabla se usará el punto de evaluación presentado en la Tabla 4; sin embargo, la normalización será distinta y es la siguiente:

$$\bar{w} = 10^2 \frac{E_2 h^3 u_z}{P_z a^2} \quad (4.2)$$

Las deformaciones para distintos ratios  $R/a$  se presentan en la Tabla 13, se incluyen los resultados de las teorías de orden superior presentadas en las referencias [13], [26].

Tabla 13 Deformaciones transversales normalizadas para distintos ratios de curvatura-lado.

R/a	5	10	20	50	100	Placa
Reddy y Liu [13]	4.4340	4.5470	4.5765	4.5848	4.5861	4.5865
Mantari et al. [26]	4.3665	4.4831	4.5137	4.5224	4.5236	4.5240
LD4	4.5856	4.6692	4.6882	4.6920	4.6919	4.6912
ED4	4.5666	4.6227	4.6269	4.6213	4.6181	4.6143
12 HRM	4.7895	4.8537	4.7989	4.7934	4.7901	4.7860
15 HRM	4.8139	4.8781	4.8238	4.8183	4.8149	4.8108
18 HRM	4.6202	4.7060	4.7124	4.7071	4.7038	4.6998
21 HRM	4.6326	4.6966	4.7029	4.6977	4.6944	4.6904

La Tabla 13 puede ser representada en forma gráfica, teniendo en cuenta la relación inversa ente el lado y la curvatura ( $a/R$ ), se debe tomar en cuenta que  $a/R=0$ , simboliza que el panel es una placa cuadrada. La grafica es la siguiente:

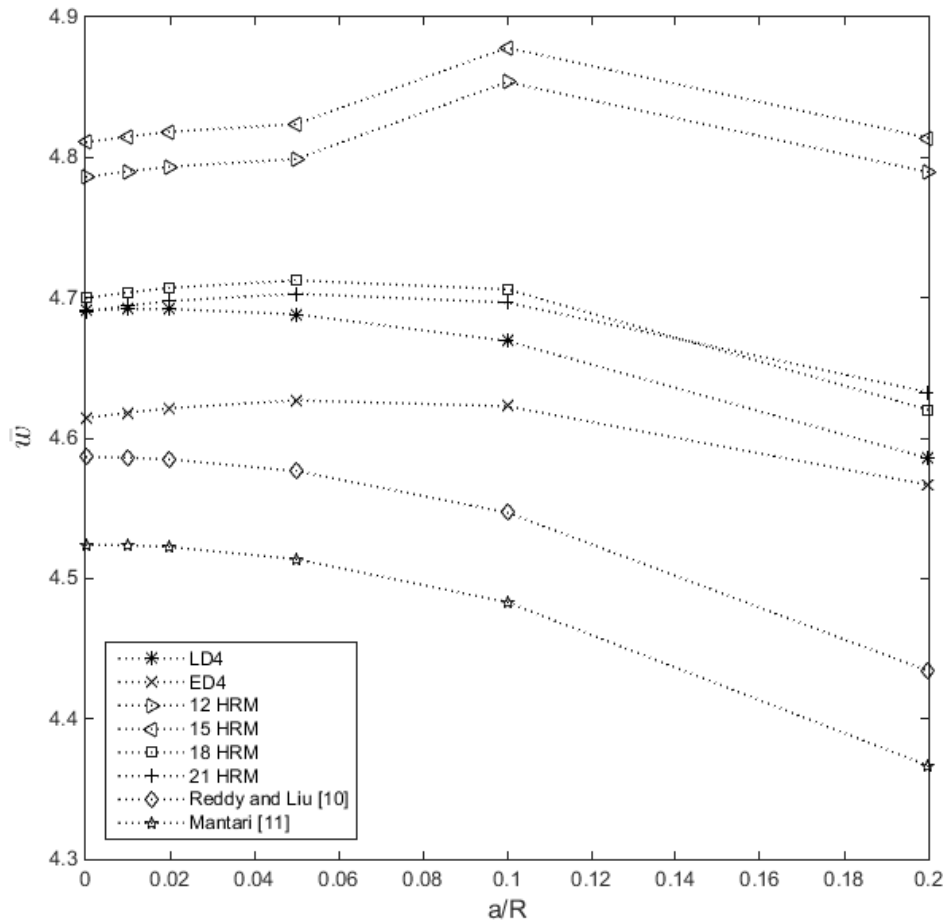


Figura 49 Relación entre el desplazamiento transversal y el ratio  $a/R$  para carga puntual.

Se puede notar que la teoría de orden superior presentada por Mantari et al. [26] posee los menores resultados de deformaciones. Los modelos de 18 y 21 variables presentan resultados cercanos a los presentados por la solución LD4. Las teorías de 12 y 15 variables presentan resultados parecidos; sin embargo, se encuentran con cierta discrepancia de los presentados por LD4. En esta parte, no se puede afirmar que la solución sea la exacta; debido a, un estudio propuesto por Giunta et al. [38] afirmando que para una correcta distribución de esfuerzos y deformaciones se necesitaría realizar un análisis de convergencia en cuanto al número de capas matemáticas del material. Se necesita crear por lo menos 16 capas para tener una solución exacta de comparación. A futuro se podría trabajar en modelos más avanzados que estén directamente vinculados exclusivamente con la carga puntual con el fin de comparación con algún software comercial.

#### 4.2 Caso 2: Laminación de Demasi

El siguiente problema fue desarrollado por el profesor Demasi considerando un panel tipo placa con ratio de espesor:  $a/h=4$ . Se pretende estudiar este caso en función a distintos ratios de curvatura-lado ( $R/a$ ) con el mismo ratio de espesor propuesto. La laminación consiste en dos laminadas con diferentes materiales compuestos. En esta parte, solo se analizará el panel sometido a carga bisinusoidal con magnitud igual a  $P_z = 1MPa$ . La siguiente imagen presentará la laminación:

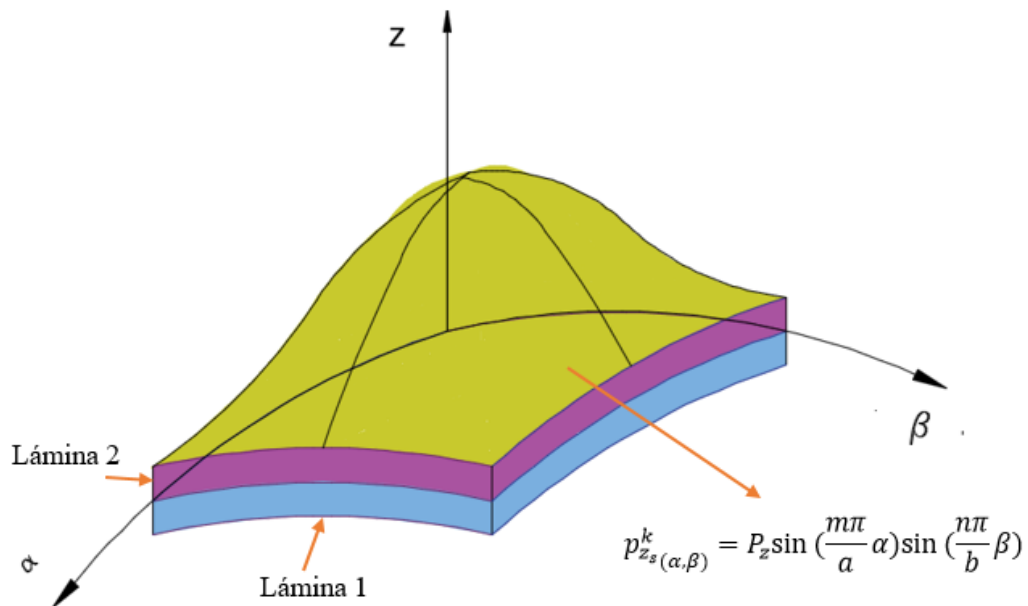


Figura 50 Laminación para el problema de Demasi [14].

Las propiedades por lámina son las siguientes:

Tabla 14 Propiedades del caso de Luciano Demasi [14]

Propiedades	Lámina 1	Lámina 2
$E_1(GPa)$	25	25
$E_2(GPa)$	1	1
$E_3(GPa)$	1	10
$G_{12}(GPa)$	0.5	0.5
$G_{13}(GPa)$	0.5	0.5
$G_{23}(GPa)$	0.2	0.2
$\nu_{12}$	0.25	0.25
$\nu_{13}$	0.25	0.25
$\nu_{23}$	0.25	0.25
Angulo de rotación ( $\vartheta$ )	0	90

La normalización para las deformaciones transversales y esfuerzos se presentan se presentan, a continuación:

$$\bar{w} = \frac{100h^3 E_2^{k=1}}{P_z a^4} u_z, \bar{\sigma}_{\alpha\alpha} = \frac{h^2}{a^2 P_z} \sigma_{\alpha\alpha}, (\bar{\sigma}_{\alpha z}, \bar{\sigma}_{\beta z}) = \frac{h}{a P_z} (\sigma_{\alpha z}, \sigma_{\beta z}) \quad (4.3a-c)$$

Se debe tomar que  $E_2^{k=1}$  corresponde al esfuerzo  $E_2$  en la capa inferior. Para resolver este problema los campos propuestos son los de 16 y 20 términos, respectivamente (ver tabla 3). Los campos fueron obtenidos aplicando una metodología similar a lo presentado en las referencias [6].

Los resultados de esfuerzos y deformaciones presentados en la tabla serán calculados en los siguientes puntos seleccionados:



Tabla 15 Puntos de evaluación para el caso 2

Parámetro	Punto de evaluación
$w$	(a/2, b/2, 0)
$\sigma_{\alpha\alpha}$	(a/2, b/2, h/4)
$\sigma_{\alpha z}$	(a/2, 0, h/4)
$\sigma_{\beta z}$	(a/2, 0, h/4)

La Tabla 16 expone los resultados principales; cabe resaltar que el porcentaje de error fue calculado en función a la solución LD4.

Tabla 16 Resultados de esfuerzos y deformaciones para el segundo caso.

R/a	Modelo	$\bar{w}$	Diff. (%)	$\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$	Diff. (%)	$\bar{\sigma}_{\alpha z}$	Diff. (%)	$\bar{\sigma}_{\beta z}$	Diff. (%)
5	LD4	2.1068	--	0.0627	--	0.0880	--	0.3222	--
	16 HRM	2.1307	-1.1340	0.0645	-3.0020	0.0690	21.5655	0.3038	5.7084
	20 HRM	2.1543	-2.2525	0.0628	-0.2824	0.0824	6.3743	0.3150	2.2466
10	LD4	2.1025	--	0.0611	--	0.0914	--	0.3214	--
	16 HRM	2.1043	-0.0822	0.0621	-1.6262	0.0737	19.4516	0.3024	5.9222
	20 HRM	2.1287	-1.2451	0.0607	0.7151	0.0863	5.6502	0.3147	2.1097
20	LD4	2.0955	--	0.0601	--	0.0929	--	0.3200	--
	16 HRM	2.0854	0.4804	0.0607	-0.9687	0.0757	18.4611	0.3006	6.0677
	20 HRM	2.1102	-0.7037	0.0594	1.1964	0.0879	5.3068	0.3134	2.0763
50	LD4	2.0897	--	0.0595	--	0.0936	--	0.3189	--
	16 HRM	2.0723	0.8302	0.0598	-0.5848	0.0769	17.8875	0.2992	6.1675
	20 HRM	2.0973	-0.3662	0.0586	1.4793	0.0888	5.1078	0.3123	2.0678
100	LD4	2.0875	--	0.0592	--	0.0939	--	0.3185	--
	16 HRM	2.0677	0.9489	0.0595	-0.4587	0.0772	17.6997	0.2987	6.2028
	20 HRM	2.0927	-0.2516	0.0583	1.5726	0.0891	5.0426	0.3119	2.0669
Placa	LD4	2.0852	--	0.0590	--	0.0941	--	0.3180	--
	16 HRM	2.0629	1.0686	0.0592	-0.3336	0.0776	17.5135	0.2981	6.2392
	20 HRM	2.0880	-0.1359	0.0580	1.6654	0.0894	4.9781	0.3114	2.0669

Se puede apreciar, el porcentaje de error de las deformaciones es menor para el modelo de 16 variables en todos los casos. En torno al esfuerzo normal se establece que en todos los casos del modelo de 16 variables el valor expuesto es mayor a la solución LD4. El modelo de 20 variables puede calcular de forma más precisa los esfuerzos transversales, como lo demuestra la tabla anterior. Si se requiere de una mayor precisión, se podría hacer una refinación mediante la teoría de equilibrio 3D; sin embargo, es un trabajo a futuro y se encuentra fuera de los alcances de esta tesis.

La distribución para la deformaciones y esfuerzos serán presentados en las Figuras 52-55 para el siguiente ratio:  $a/R=5$ . Se consideran los puntos de evaluación considerados en la Tabla 14 bajo el dominio del espesor.

La deformación transversal presenta cierta una tendencia distinta a lo presentado por los modelos 16 HRM y 20 HRM; sin embargo, los valores numéricos son bastante cercanos. Esta discrepancia se puede con bastante claridad en la primera lamina ( $-0.5 < z/h < 0$ ). Se afirma que el modelo de 20 variables presenta un mayor valor numérico al de 16 variables en toda la distribución.

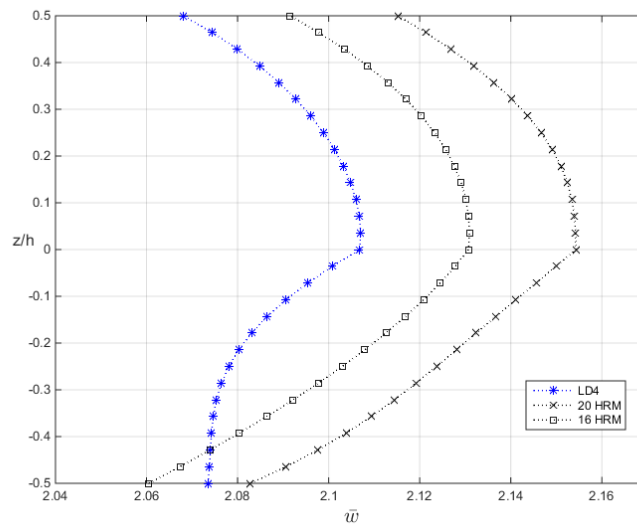


Figura 51 Distribución de la deformación transversal para la laminación de Demasi.

La distribución del esfuerzo normal (ver Figura 53) es bastante buena para los dos campos propuestos y se afirma que ambos modelos representan de forma correcta la tendencia de la solución LD4. Se puede apreciar el cambio abrupto en la distribución en  $z/h=0$  por el cambio de las propiedades mecánicas de la laminación.

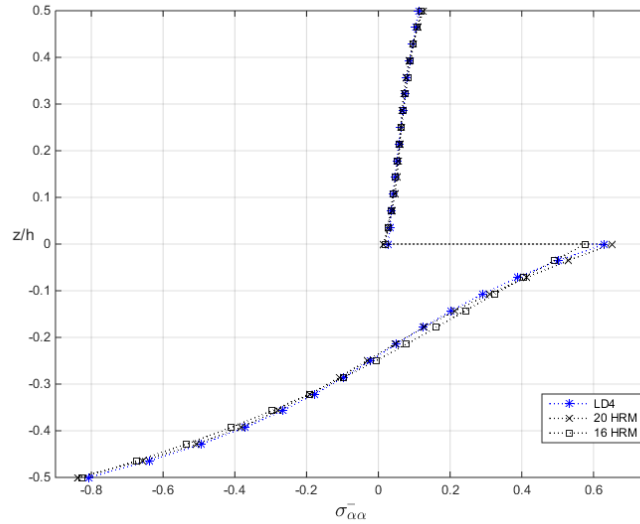


Figura 52 Distribución de esfuerzo normal  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha}$  para la laminación de Demasi.

El esfuerzo transversal cortante  $\bar{\sigma}_{z\alpha}$  presenta una tendencia incorrecta en el caso del modelo de 16 variables, mostrando una cierta discontinuidad en el cambio de laminación. El modelo 20 HRM se aproxima a la tendencia del LD4 y no presenta discontinuidad.

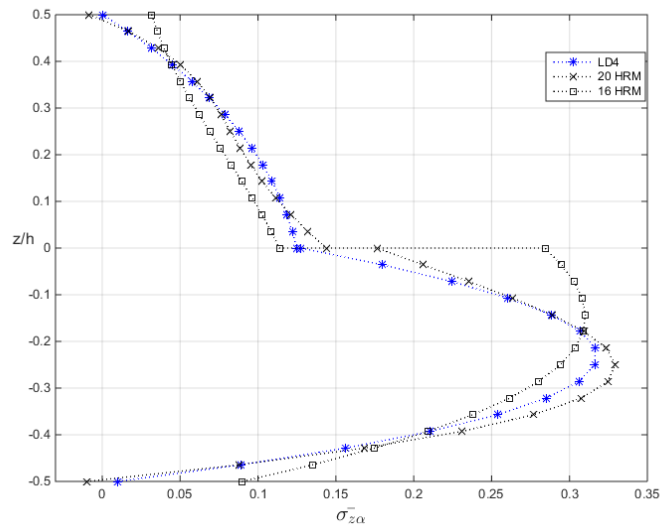


Figura 53 Distribución de esfuerzo cortante transversal  $\bar{\sigma}_{z\alpha}$  para la laminación de Demasi.

El esfuerzo normal  $\bar{\sigma}_{z\beta}$  es presentado en la Figura 55. A diferencia, del esfuerzo  $\bar{\sigma}_{z\alpha}$  los modelos de 16 y 21 siguen una tendencia del LD4. Ambos modelos no llegan a cero en

la parte superior de la segunda capa e inferior de la primera. Este tipo de observaciones solo son posibles si se realiza el análisis de refinación por equilibrio.

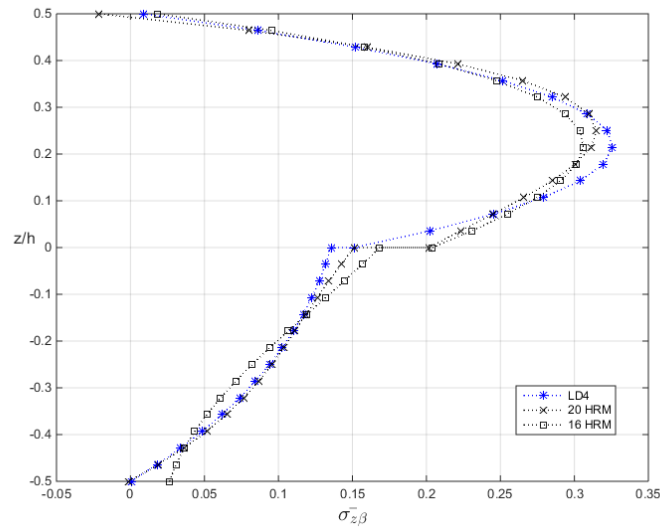


Figura 54 Distribución de esfuerzo normal  $\bar{\sigma}_{z\beta}$  para la laminación de Demasi.

#### 4.3 Retos a futuro

- Refinamiento por equilibrio a fin de presentar mejores los resultados en los esfuerzos cortantes transversales  $\bar{\sigma}_{z\alpha}$ ,  $\bar{\sigma}_{z\beta}$  y el normal transversal  $\bar{\sigma}_{zz}$ .
- Analizar otro tipo de curvaturas variables, es decir cascarones tipo conos, paraboloides, elipsoides, toroides, hiperboloides, entre otros. Tomando en cuenta, se debe considerar emplear métodos como funciones radiales y el método de la cuadratura diferencial. Se debe tomar en cuenta que el método de Navier solo puede ser considerado para curvaturas constantes.
- Analizar otro de tipo de laminaciones (materiales monoclinicos) y compuestos sándwich.
- Análisis de otro tipo de fenómenos mecánicos como vibraciones, pandeo, problemas térmicos.
- Evaluación de otro tipo de condiciones de contorno como empotrado o libre y combinaciones entre ellas para cada extremo del cascarón.

# 5

## Conclusiones

Esta tesis presenta un estudio analítico para resolver problemas estáticos en cascarones de doble curvatura considerando una curvatura constante. Los campos de deformaciones han sido considerados como combinaciones de funciones trigonométricas, exponenciales, zigzag y polinomios de Maclaurin sobre el espesor del cascarón. Las condiciones de contorno fueron consideradas como simplemente apoyado en todos los extremos del panel. Diferentes tipos de carga fueron evaluados como son la bisinusoidal, uniformemente distribuida, distribuida localizada, hidrostática transversal y puntual. Las ecuaciones gobernantes fueron calculadas en función al principio de trabajo virtual y resueltas mediante el método de Navier. Los resultados fueron calculados tomando en cuenta la deformación  $w$ , esfuerzo normal  $\sigma_{\alpha\alpha}$ , esfuerzos transversales cortantes  $\sigma_{\alpha z}$ ,  $\sigma_{\beta z}$ , esfuerzo cortante en el plano  $\sigma_{\alpha\beta}$  y el esfuerzo normal transversal  $\sigma_{zz}$  considerando diferentes ratios de espesor ( $a/h$ ) y de curvatura ( $R/a$ ). En este contexto se establecen las siguientes conclusiones particulares de la investigación:

- La tesis demostró la influencia de las funciones trigonométricas para el primer caso (ver campos propuestos en Tabla 3) frente a las funciones exponenciales.
- El uso de combinaciones entre términos trigonométricos, exponenciales y funciones zigzag en los campos de deformaciones (ver Tabla 3) fueron decisivos para resolver laminaciones complejas como la presentada por el profesor Demasi.
- En todos los casos, al decrecer el ratio  $a/R$ , se incrementa la deformación transversal. Demostrando que la curvatura es determinante en el cálculo de desplazamientos y esfuerzos.

En base a esta tesis, posteriormente se hicieron publicaciones científicas en torno a los cascarones. El comportamiento dinámico de cascarones (Monge et al., 2018) fue publicado en la revista Q1 Engineering Structures. Adicionalmente, se viene evaluando la publicación del procedimiento de cómo aplicar las ecuaciones de equilibrio para

refinación de esfuerzos cortantes y transversal normal que son de importancia en cascarones.

# 6

## Bibliografía

- [1] D. Moore, «Romanconcrete.com,» 1995. [En línea]. Available: <http://www.romanconcrete.com/docs/chapt01/chapt01.htm>.
- [2] Z. Goraj, «Load composite structure in aeronautical engineering,» *Transactions of the institute of aviation*, n° 191, 2007.
- [3] M. Flekiewicz y T. Matyja, «Construction and validation of the shells of the automotive toroidal LPG tanks safe in operation».
- [4] C. Whitford, A. Joda, S. Jones, F. Bao, P. Rama y A. Elsheikh, «Ex vivo testing of intact eye globes under inflation conditions to determine regional variation of mechanical stiffness,» *Eye and vision*, vol. 3, n° 1, p. 21, 2016.
- [5] R. Casson, G. Chidlow y J. Wood, «Definition of glaucoma: clinical and experimental concepts. Clinical & experimental ophthalmology,» *Clinical & experimental ophthalmology*, vol. 40, n° 4, pp. 341-349, 2012.
- [6] J. Yarasca, J. Mantari, M. Petrolo y E. Carrera , «Best Theory Diagrams for cross-ply composite plates using polynomial, trigonometric and exponential thickness expansions,» *Composite Structures*, vol. 161, pp. 362-383, 2017.
- [7] J. Yarasca, J. Mantari, M. Petrolo y E. Carrera, «Multiobjective Best Theory Diagrams for Cross-Ply Composite Plates employing Polynomial, Zig-Zag, Trigonometric and Exponential Thickness Expansions,» *Composite Structures*, vol. 176, pp. 860-876, 2017.
- [8] J. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells, theory and analysis*, CRC Press, 1997.
- [9] R. Jones, *Mechanics of composite materials*, Taylor and Francis, 1999.
- [10] Gu, J. Guoyong, Y. Tiangui y S. Zhu, «Structural Vibration A uniform accurate solutions for laminated beam, plates and shells with general boundary conditions,» Science Press Beijing, Beijing, 2015.
- [11] J. Mantari y J. Monge, «Buckling, free vibration and bending analysis of functionally sandwich plates based on an optimized hyperbolic unified formulation,» *International Journal of mechanical sciences*, vol. 119, pp. 170-186, 2016.

- [12] E. Carrera, «Multilayered shell theories accounting for layerwise mixed description part 1: Governing equations,» *AIAA Journal*, vol. 37, 1999.
- [13] J. Reddy y C. Liu, «A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells,» *International journal of engineering science*, vol. 23, n° 3, pp. 319-330, 1985.
- [14] L. Demasi, «Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part V: Results,» *Composite structures*, vol. 88, pp. 1-16, 2009.
- [15] A. W. Leissa, *Vibration of shells*, New York: National aeronautics and space administration, 1973.
- [16] F. Tornabene, «Modellazione e soluzione di strutture a guscio in materiale anisotropo,» *Facolta di ingegneria Universita di Bologna, Bologna*, 2007.
- [17] P. Gould, *Analysis of plates and shells*, Springer Verlag, 1988.
- [18] H. Krauss, *Thin Elastic Shell*, New York: Wiley, 1967.
- [19] A. Love, «The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell,» *Philosophical transactions of the royal society A*, n° 179, pp. 491-546, 1888.
- [20] W. Soedel W., *Vibrations of shells and plates*, Marcell Dekker, 2004.
- [21] F. Hildebrand, E. Reissner y G. Thomas, «Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells,» *NACA technical notes*, n° 1883, 1949.
- [22] T. Kant y B. Manjunatha, «An unsymmetric Frc laminate c°finite element model with 12 degrees of freedom per node,» *Engineering Computation*, vol. 5, n° 4, pp. 292-308, 1988.
- [23] B. Pandya y T. Kant, «Finite element analysis of laminated composite plates using high-order displacement model,» *Composite science and technology*, vol. 32, n° 2, pp. 137-155, 1988.
- [24] C. Roque, A. Ferreira y R. Jorge, «A radial basis function approach for the free vibration analysis of functionally graded plates using a refined theory,» *Jouranal of Sound and Vibration*, vol. 300, pp. 1048-1070, 2007.
- [25] K. Lo, R. Christensen y E. Wu, «A high-order theory of plate deformation—part2: laminated plates,» *J. Appl. Mech.*, vol. 44, n° 4, pp. 669-676, 1977.
- [26] J. Mantari, S. Oktem y C. Guedes Soares, «Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher-order shear deformation theory,» *Composite structures*, vol. 94, pp. 37-49, 2011.
- [27] S. Ambartsumian, «On theory of bending plates,» *Isz Otd Tech Nauk AN SSSR*, vol. 5, n° 69-77, 1958.
- [28] E. Reissner, «On transverse bending of plates, including the effect of transverse,» *International Journal of solids and structures*, vol. 11, pp. 569-573, 1975.
- [29] J. Reddy, «A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation,» *International Journal of solids and structures*, vol. 20, pp. 881-896, 1984.

- [30] M. Touratier, «An efficient standard plate theory,» *International Journal of Engineering Science*, vol. 29, n° 8, pp. 901-916, 1991.
- [31] K. Soldatos, «A transverse shear deformation theory for homogeneous,» *Acta Mechanica*, vol. 94, pp. 195-220, 1992.
- [32] L. Demasi, «Mixed plate theories based on the Generalized Unified Formulation. Part I: Governing equations,» *Composite structures*, vol. 87, pp. 1-11, 2009.
- [33] R. Panduro y J. Mantari, «Hygro-thermo-mechanical behavior of classical composites using a new trigonometrical shear strain shape function and a compact layerwise approach,» *Composite structures*, vol. 160, pp. 378-391, 2016.
- [34] F. Fazzolari, «Spectral methods for static and dynamic analysis of multilayered plates,» *Tesi de Laurea*, Torino, San Diego, 2010.
- [35] M. Filippi, M. Petrolo, S. Valvano y E. Carrera, «Analysis of composites and sandwich structures by trigonometric, exponential and miscellaneous and a MITC9 plate element,» *Composite structures*, vol. 150, pp. 103-114, 2016.
- [36] E. Viola, F. Tornabene y N. Fantuzzi, «General higher-order shear deformation theories for the free vibration analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels,» *Composite structures*, vol. 95, pp. 639-666, 2013.
- [37] M. Cinefra, *Refined advanced shell models for the analysis of advanced structures*, Torino: Ph.D. Dissertation, 2012.
- [38] G. Giunta, F. Biscani, S. Belouettar y E. Carrera, «Hierarchical modelling of doubly curved laminated composite shells under distributed and localised loadings,» *Composites: Part B*, vol. 42, pp. 682-691, 2011.
- [39] N. N. Huang, «Influence of shear correction factors in the higher order shear deformation laminated shell theory,» *International Journal Solids Structures*, vol. 31, n° 9, pp. 1263-1277, 1994.
- [40] S. Xiao-Ping, «A refined theory of laminated shells with higher-order transverse shear deformation,» *International Journal Solids Structures*, vol. 34, n° 6, pp. 673-683, 1997.
- [41] F. Tornabene, N. Fantuzzi, E. Viola y E. Carrera, «Static analysis of doubly-curved anisotropic shells and panels using CUF approach, differential geometry and differential quadrature method,» *Composite Structures*, vol. 107, pp. 675-697, 2014.
- [42] E. Viola, F. Tornabene y N. Fantuzzi, «Static analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels using general higher-order shear deformation theories,» *Composite structures*, vol. 101, pp. 59-93, 2013.
- [43] J. Monge, J. Mantari, S. Charca y N. Vladimir, «An axiomatic/asymptotic evaluation of the best theories for free vibration of laminated and sandwich shells using non-polynomial functions,» *Engineering Structures*, vol. 172, pp. 1011-1024, 2018.
- [44] S. H. K. Collection, «National Gallery of Art,» [En línea]. Available: <https://www.nga.gov/Collection/art-object-page.165.html#history>.



[45] J. Mantari y C. Guedes Soares , «Analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a generalized higher-order shear deformation theory,» *Composite structures* , vol. 94, n° 2640-2656, 2012.

## ANEXOS

Diagrama de bloques para la programación del código en MATLAB:

